МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики

Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права

Алферова З.В.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Алферова З.В. Линейная алгебра / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. М., 2001 г.

Часть № 1.

Элементы линейной алгебры.

1.1. Определители и их свойства.

Всякое расположение n натуральных чисел 1,2,3,..,n (элементов) в определенном порядке называют перестановкой из n элементов. Существует n! различных перестановок. Говорят, что числа i и j образуют инверсию в данной перестановке, если число i больше числа j и располагается левее этого числа j. Обозначим через S общее число инверсий, образуемых элементами данной перестановки. Если S – четное число, то перестановка называется четной, в противном случае – нечетной.

Определителем n-го порядка называется алгебраическая сумма n! членов, каждый из которых является произведением n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца таблицы (матрицы):

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

со знаком “плюс” или “минус”. Для определения знака, с которым входит данное произвдение в определитель, располагают элементы в этом произведении так, чтобы первые индексы образовали перестановку без инверсий (1,2,3,...,n), затем подсчитывают общее число инверсий S в перестановке, составленной из вторых индексов элементов преобразованного произведения. Если перестановка четна, то данное произведение входит в определитель со знаком “плюс”, в противном случае – со знаком “минус”. Определитель n-го порядка изображается в виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если в определителе n-го порядка вычеркнуть i-ую строку (i=1,2,3…n) и j-й столбец (j=1,2,3...,n), то получится определитель (n-1)-го порядка, называемый дополнительным минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя Δ.

Алгебраическим дополнением A_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} в определителе Δ, называется соответствующий ему минор, взятый со знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

При вычислении определителей часто пользуются следующими их свойствами:

1) определитель равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на соответствующие этим элементам алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij};$$

2) определитель равен нулю, если одна из его строк (столбцов) состоит из нулей;
3) определитель равен нулю, если две его строки (столбца) равны;
4) определитель равен нулю, если все соответствующие элементы каких-либо двух его строк (столбцов) пропорциональны;
5) общий множитель элементов любой строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя;
6) определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

С помощью свойств 5 или 6 получают из исходного определителя равное ему выражение, содержащее элемент, равный 1 или –1, который называют направляющим. Затем с помощью свойства 6 в строке (столбце), содержащей направляющий элемент, получают на месте остальных элементов нули. Далее, применяя свойство 1 в отношении строки (столбца), состоящей из (n-1) нулей, вычисление определителя n-го порядка фактически сводят к вычислению одного определителя (n-1)-го порядка. Следует отметить, что если в исходном определителе или в определителях низшего порядка, получаемых в процессе вычислений, имеется элемент, равный 1 или –1, то за направляющий можно брать именно этот элемент; кроме того, если в процессе вычислений становится очевидным свойство 4 (например, все элементы строки или столбца равны нулю), то вычисление заканчивается.

Пример 1. Являются ли членами определителя шестого порядка следующие произведения:

а) $a_{31} \cdot a_{56} \cdot a_{32} \cdot a_{45} \cdot a_{64} \cdot a_{13}$;

б) $a_{26} \cdot a_{32} \cdot a_{52} \cdot a_{43} \cdot a_{64} \cdot a_{15}$?

Если являются, то определить из знак.

Решение. Произведение а) не является членом определителя шестого порядка, так как два элемента a_{31} и a_{32} взяты из третьей строки. Произведение б) является членом определителя шестого порядка, так как в него входят элементы, взятые из каждой строки и каждого столбца. Чтобы определить знак данного числа, запишем его элементы по возрастанию первых индексов:

$$a_{15} \cdot a_{26} \cdot a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{52} \cdot a_{64}$$

Выпишем перестановку из вторых индексов: 5,6,2,3,1,4 – и определим число инверсий в ней. До единицы стоят 4 элемента, следовательно, она образует 4 инверсии, $S_1=4$. Затем единицу зачеркиваем и подсчитываем число оставшихся элементов, стоящих до двойки: $S_2=2$. Далее $S_3=2$; $S_4=2$; $S_5=0$; $S_6=0$. Общее число инверсий в данной подстановке равно сумме: S=4+2+2+2+0+0=10. Так как число инверсий четное, то данный член определителя имеет знак “плюс”.

Пример 2. Вычислить определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение. Получим на месте какого-либо элемента определителя единицу. Для этого возьмем два элемента, отличающиеся друг от друга на единицу, например 4 и 5 в первой строке. Вычтем из четвертого столбца третий. Возьмем за направляющий элемент этого определителя $a_{14}=1$ и получим нули в четвертом столбце. Для этого ко второй строке прибавим первую, умноженную на 3, из третьей и четвертой строк вычтем первую; полученный определитель разложим по элементам четвертого столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 13 & 17 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Сведем вычисления последнего определителя третьего порядка к вычислению определителя второго порядка. Для этого вынесем за знак определителя общий множитель 2 элементов второй строки и в качестве направляющего элемента получившегося определителя возьмем, например, $a_{23}=-1$. Получим нули во второй строке определителя-сомножителя, прибавляя его третий столбец ко второму и к первому столбцам:

$$\Delta = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 26 & 30 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее, разлагая последний определитель по элементам второй строки, будем иметь:

$$\Delta = (-2) \cdot (-1) \cdot A_{23} = 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 26 & 30 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \left[26 \cdot (-2) - 30 \cdot 2\right] = 224.$$

Определитель третьего порядка можно вычислить и по правилу Саррюса. Для этого припишем к таблице определителя первые два столбца справа (рис. 1). Выделим главную диагональ определителя, идущую с верхнего левого угла к нижнему правому, и треугольники, основания которых параллельны главной диагонали. Произведения этих элементов берем с “плюсом”. Выделим также побочную диагональ определителя, идущую с его верхнего правого угла к нижнему левому, и треугольники, основания которых параллельны побочной диагонали. Соответствующие произведения элементов берем с “минусом”.

Рис. 1. Вычисление определителя по правилу Саррюса.

Таким образом, для определителя третьего порядка будем иметь:

$$\Delta = -[9\cdot 2\cdot(-1)+13\cdot(-2)\cdot 3+17\cdot 2\cdot(-1)-17\cdot 2\cdot 3-9\cdot(-2)\cdot(-1)-13\cdot 2\cdot(-1)] =$$
$$= 18+78+34+102+18-26=224.$$

Упражнения.

Определить число инверсий в перестановках:

1.1.1. 2, 1, 3, 4, 6, 5;
1.1.2. 3, 2, 4, 7, 5, 1, 6;
1.1.3. 1, 4, 8, 5, 6, 2, 3, 7;
1.1.4. 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;
1.1.5. n, n-1, n-2, n-3,…, 3, 2, 1;
1.1.6. 2, 4, 6,…, 2n, 1, 3, 5,…, 2n-1;
1.1.7. 1, 3, 5,…, 2n-1, 2, 4, 6,…,2n;
1.1.8. 4, 8,…, 4n, 3, 7,…, 4n-1, 2, 6,…, 4n-2, 1, 5,…., 4n-3;
1.1.9. 3, 6, 9,…, 3n, 1, 4, 7,…, 3n-2, 2, 5, 8,…, 3n-1.

С какими знаками входят в определитель следующие члены:

1.1.10. $a_{31}\,a_{42}\,a_{53}\,a_{16}\,a_{24}\,a_{65}$;
1.1.11. $a_{25}\,a_{43}\,a_{72}\,a_{51}\,a_{34}\,a_{16}\,a_{67}$;
1.1.12. $a_{13}\,a_{54}\,a_{32}\,a_{61}\,a_{26}\,a_{45}$;
1.1.13. $a_{11}\,a_{23}\,a_{34}\,\dots\,a_{n-1,n}\,a_{n2}$;
1.1.14. $a_{21}\,a_{12}\,a_{43}\,a_{34}\,\dots\,a_{2n,2n-1}\,a_{2n-1,2n}$;

Являются ли членами определителя следующие произведения? Если являются, то определить их знак.

1.1.15. $a_{13}\,a_{24}\,a_{32}\,a_{43}\,a_{55}$;
1.1.16. $a_{23}\,a_{45}\,a_{52}\,a_{14}\,a_{31}$;
1.1.17. $a_{82}\,a_{35}\,a_{41}\,a_{63}\,a_{56}\,a_{17}\,a_{74}\,a_{28}$;
1.1.18. $a_{12}\,a_{23}\,a_{34}\,\dots a_{n-1,n}$, где $1\le i\le n.$
1.1.19. Подобрать числа i и j так, чтобы произведение $a_{1i}\cdot a_{52}\cdot a_{4j}\cdot a_{23}\cdot a_{53}$ входило в определитель пятого порядка со знаком плюс.
1.1.20. Записать все члены определителя 4-го порядка, входящие в него со знаком минус и содержащие множителем элемент a_{32}.
1.1.21. Не вычисляя определителя, показать, почему они равны нулю:

$$\text{а)}\begin{vmatrix}2&3&4\\5&3&1\\0&0&0\end{vmatrix},\quad \text{б)}\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&12\end{vmatrix},\quad \text{в)}\begin{vmatrix}3&1&2\\0&4&1\\3&1&2\end{vmatrix}.$$

1.1.22. Вычислить определители:

$$\text{а)}\begin{vmatrix}23153&23253\\10127&10227\end{vmatrix},\quad \text{б)}\begin{vmatrix}1715&1700\\1690&1675\end{vmatrix}.$$

1.1.23. Числа 182, 299 и 312 делятся на 13. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

делится на 13.

1.1.24. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} a & -a & a \\ b & b & -b \\ -c & c & c \end{vmatrix}$$

1.1.25. Найти определители (б) и (в), зная определитель (а):

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -3, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

.

1.1.26Вычислить определители тремя способами: по правилу треугольников (или по правилу Саррюса); путем разложения по элементам третьей строки; путем "накопления" единицы с нулями во втором столбце:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{г)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.1.27. Вычислить определитель путем разложения по элементам последующего столбца:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 4 & c \\ 7 & 1 & 12 & d \end{vmatrix}.$$

1.1.28. Вычислить определитель путем разложения по элементам первого столбца:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b & 3 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{в)} \begin{vmatrix} a & 5 & 2 & -1 \\ b & 4 & 4 & -3 \\ c & 2 & 3 & -2 \\ d & 4 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители:

1.1.29. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 17 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ 1.1.31. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

1.1.32. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$ 1.1.33. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.1.34. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

1.1.35. $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ 1.1.36. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ 1.1.37. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

1.1.38. $\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/4 & 1 \\ 1/5 & 1/2 & 2/5 & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.39. $\begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -5/2 \end{vmatrix}$

1.1.40. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 1.1.41. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.42. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 5 & 8 & 11 & 16 & 16 \\ 8 & 18 & 27 & 49 & 41 \\ 1 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$

Вычислить определители n-го порядка:

1.1.43. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ 1.1.44. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

1.1.45. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$ 1.1.46. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

1.1.47. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_{n-1} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix}$ 1.1.48. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ . & . & . & \dots & . \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$

1.2. Матрицы и операции над ними.

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица элементов, имеющая m строк и n столбцов. Матрица такого порядка обозначается так:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} ,$$

где a_{ij} – элемент i-й строки (i=1,2…m) и j-го столбца (j=1,2…n).

Над матрицами можно производить следующие действия:

1) сложение и вычитание;
2) умножение матрицы на число;
3) умножение;
4) возведение в степень.

Сложение и вычитание производится над матрицами только одинаковых порядков. Суммой матриц А и В называется матрица того же порядка, что и у слагаемых, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В. Аналогично определяется и вычитание матриц.

Чтобы умножить матрицу на число, следует умножить на это число каждый элемент матрицы.

Для осуществления произведения двух матриц необходимо, чтобы число столбцов первого сомножителя равнялось числу строк второго. При умножении матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на матрицу $B = (b_{jk})_{n \times l}$ получаем матрицу $C = (c_{ik})_{m \times l}$, у которой элемент c_{ik} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы к-го столбца матрицы В, т.е.: $C_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$.

Возводить в степень можно только квадратные матрицы. К-й степенью квадратной матрицы А называется произведение К множителей, равных А.

<u>Пример 1</u>. Перемножить матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \end{Vmatrix} \text{ и } B = \begin{Vmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}.$$

<u>Решение</u>:

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 9 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \\ 5 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot 3 & 5 \cdot 9 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 35 & 26 \\ 83 & 89 \end{Vmatrix}$$

.

Для данного примера можно найти и обратное произведение, т.е. В · А, так как число столбцов у матрицы В равно числу строк матрицы А:

$$B \cdot A = \begin{Vmatrix} 7 \cdot 2 + 9 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 9 \cdot 4 & 7 \cdot 1 + 9 \cdot 8 \\ 6 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 6 \cdot 1 + 1 \cdot 8 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 8 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 59 & 57 & 79 \\ 17 & 22 & 14 \\ 31 & 29 & 43 \end{Vmatrix}.$$

Пример 2. Найти f(A), если $f(x)=x^2+4x-7E$ и

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 6 & 7 & 9\end{Vmatrix}$$

Решение.

$$f(A)=A^2+4A-7E=\begin{Vmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 6 & 7 & 9\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 6 & 7 & 9\end{Vmatrix}+4\cdot\begin{Vmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 6 & 7 & 9\end{Vmatrix}-7\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}15 & 32 & -8\\ -24 & -24 & -44\\ 72 & 107 & 59\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}12 & 20 & 4\\ 0 & 8 & -16\\ 24 & 28 & 36\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}20 & 52 & -4\\ -24 & -23 & -60\\ 96 & 135 & 88\end{Vmatrix}.$$

Упражнения.

1.2.1. Найти: а) 3A-2B; б) A+5B; в) 2A+B+5, если

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{Vmatrix}.$$

1.2.2. Найти: а) 3B-A; б) B-2A; в) 3A+B-2; если

$$A=\begin{Vmatrix}3 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & -2\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 3 & -2\end{Vmatrix}.$$

1.2.3. Найти AB и BA, если

$$A=\begin{Vmatrix}3\\ 5\\ 4\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\end{Vmatrix}.$$

Найти произведения:

1.2.4. $\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 4 & 2\\ 5 & 3 & -1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 3\\ -4 & 1\\ 5 & 2\\ 3 & 0\end{Vmatrix}$

1.2.5. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{Vmatrix}$

1.2.6. $\begin{Vmatrix}3 & 5 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}5 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\end{Vmatrix}$

1.2.7. $\begin{Vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}5 & -1\\ 0 & 4\end{Vmatrix}$

1.2.8. $\begin{Vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -3 \\ 2 \end{Vmatrix}$

1.2.9. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$

1.2.10. Пусть E – единичная матрица порядка 3×3, а A любая 3×3 матрица. Показать, что AE=EA=A.

1.2.11. Пусть O – нулевая и A – любая квадратные матрицы одного и того же порядка. Показать, что OA=AO=O.

Произвести указанные действия:

1.2.12. $\begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -4 \end{Vmatrix}^2$ 1.2.13. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}^2$ 1.2.14. $\begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{Vmatrix}^5$ 1.2.15. $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix}^3$

1.2.16. Найти E^n, где E – единичная матрица любого порядка.
1.2.17. Найти O^n, где O – нулевая квадратная матрица любого порядка.
1.2.18. Найти AB-BA, если

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{Vmatrix}.$$

1.2.19. Даны матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$$

Найти 3A+B, 2A-3B, A^2-B^2. Проверить, выполняется ли переместительный закон умножения для данных матриц. Найти f(A), если f(X)=X^2-4X-3.

1.2.20. $A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{Vmatrix}$ 1.2.21. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$

1.3. Вычисление обратной матрицы.

Обратную матрицу имеет только квадратная несобственная матрица, т.е. матрица, определитель которой не равен нулю. Обратной матрицей A^{-1} к матрице А называется такая матрица, которая при умножении на данную матрицу слева или справа дает единичную матрицу, т.е.:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E.$$

Для вычисления обратной матрицы можно поступить следующим образом:

1) вычислить определитель данной матрицы Δ ; если он не равен 0, то обратная матрица существует;

2) найти присоединенную матрицу (А*) к данной матрице (А):

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix},\quad A^{*}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ . & . & \dots & .\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}\end{Vmatrix}$$

3) умножить присоединенную матрицу на число, обратное определителю:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot A^{*}$$

Обратную матрицу можно также найти, используя метод Жордана-Гаусса. Для этого к матрице А приписывается единичная матрица того же порядка. После умножения обеих частей полученной матрицы на A^{-1} будем иметь:

$$\left\| A \,\middle|\, E \right\| \to \left\| A\cdot A^{-1} \,\middle|\, E\cdot A^{-1} \right\|.$$

Первая часть этой матрицы есть матрица Е, вторая часть – A^{-1}. Следовательно, матрицу $\left\| A \,\middle|\, E \right\|$ надо преобразовать так, чтобы в левой части получилась матрица Е, тогда обратная матрица будет в правой части преобразованной матрицы.

Пример. Найти обратную матрицу к матрице:

$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{Vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы А:

$$\Delta=-2+8-8+12=10.$$

Следовательно, обратная матрица для матрицы А существует. Составим присоединенную матрицу. Для этого найдем к каждому элементу матрицы алгебраическое дополнение:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=8;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=5;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}=-10.$$

Присоединенная матрица имеет вид:

$$A^*=\begin{Vmatrix}-5&5&5\\4&-2&0\\8&-4&-10\end{Vmatrix}$$

Разделив каждый элемент A* на Δ=10 получим обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}-0.5&0.5&0.5\\0.4&-0.2&0\\0.8&-0.4&-1\end{Vmatrix}.$$

Можно проверить правильно ли нашли обратную матрицу, исходя из соотношения**:** $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$**.**

Найдем теперь обратную матрицу, используя метод Жордана-Гаусса. Составим матрицу $\left\|A\,\middle|\,E\right\|$ и будем преобразовывать ее так, чтобы вместо A получить E:

$$\left\|\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\4&1&2&0&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right\|\to\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&3/2&1/2&1/2&0&0\\0&-5&0&-2&1&0\\0&2&-1&0&0&1\end{array}\right\|\to\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1/2&-1/10&3/10&0\\0&1&0&2/5&-1/5&0\\0&0&-1&-4/5&-2/5&1\end{array}\right\|\to$$

$$\to\left\|\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&1/2&1/2\\0&1&0&2/5&-1/5&0\\0&0&1&4/5&-2/5&-1\end{array}\right\|.$$

В результате таких преобразований во второй части матрицы получили обратную:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}-1/2&1/2&1/2\\2/5&-1/5&0\\4/5&-2/5&-1\end{Vmatrix}$$

<u>Упражнения.</u>

Найти обратные матрицы для матриц:

1.3.1. $\begin{Vmatrix}2&-4\\5&1\end{Vmatrix}$ 1.3.2. $\begin{Vmatrix}1&2\\2&5\end{Vmatrix}$ 1.3.3. $\begin{Vmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\0&0&1\end{Vmatrix}$ 1.3.4. $\begin{Vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&2&2\end{Vmatrix}$

1.3.5. $\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ 1.3.6. $\begin{Vmatrix} 5 & 1 & -9 \\ 3 & 5 & -7 \\ 5 & 6 & 8 \end{Vmatrix}$ 1.3.7. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$

1.3.8. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ 1.3.9. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 7 & 11 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{Vmatrix}$ 1.3.10. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

1.3.11. $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$ 1.3.12. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{Vmatrix}$ 1.3.13. $\begin{Vmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$

1.3.14. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{Vmatrix}$ 1.3.15. $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ 1.3.16. $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$

1.3.17. $\begin{Vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{Vmatrix}$ 1.3.18. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$ 1.3.19. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$

1.3.20. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$

1.4. Решение матричных уравнений.

Систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

можно написать в матричной форме (в виде матричного уравнения), если матрицу из коэффициентов при неизвестных обозначить через А, матрицу-столбец из неизвестных – через Х и матрицу-столбец свободных членов – через В, т.е.

$$A \cdot X = B. \qquad (1)$$

Пусть определитель Δ матрицы А не равен нулю. Чтобы решить уравнение (1), то есть найти неизвестную матрицу Х, умножим его на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и ЕХ=Х, то получаем решение матричного уравнения (1) в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Таким же образом можно решать любые матричные уравнения, если соответствующие обратные матрицы существуют.

Пример. Найти неизвестную матрицу Х из уравнения:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot X \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Решение. Обозначим данные матрицы соответственно буквами А, В и С. В результате получим следующее матричное уравнение:

$$A \cdot X \cdot B = C.$$

Предположим, что A^{-1} и B^{-1} существуют. Чтобы найти матрицу Х, умножим данное уравнение на A^{-1} слева:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C, \text{ или } X \cdot B = A^{-1} \cdot C.$$

Далее умножим полученное уравнение на обратную матрицу B^{-1} справа. В результате получаем решение:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Находим обратные матрицы для А и В:

$$\| A | E \| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & -0.5 \end{array} \right\|,$$

$$\| B | E \| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & -2/3 & 1 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1 & 1.5 \end{array} \right\|,$$

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{Vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{Vmatrix}$$

Полученные обратные матрицы А и В подставляем в равенство

$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$**:**

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & -8 \\ -0.5 & 0.5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 8 & -11 \\ -6.5 & 9.5 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, $X = \begin{Vmatrix} 8 & -11 \\ -6.5 & 9.5 \end{Vmatrix}$.

Проверку можно осуществить, подставлив матрицу X в исходное уравнение:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 8 & -11 \\ -6.5 & 9.5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} -5 & 8 \\ -2 & 5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}, \text{ т.е. } \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Упражнения.

Записать систему линейных уравнений в виде матричного уравнения и решить его:

1.4.1. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

1.4.2. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

1.4.3. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 &= 3 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 &= -9 \end{aligned}$$

1.4.4. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Найти неизвестную матрицу X из уравнений:

1.4.5. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 6 \end{Vmatrix}$ 1.4.6. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{Vmatrix}$

1.4.7. $\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{Vmatrix} \cdot X \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$

1.4.8. $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$

1.4.9. $\begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot X \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$

1.4.10. Формула поворота осей координат на угол α имеют вид:

$$x_2 = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$$

$$y_2 = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

Найти обратные соотношения, записав систему уравнений в матричной форме и разрешив полученное уравнение относительно x_1 и y_1.

Найти результат последовательного выполнения двух линейных преобразований с помощью произведения соответствующих матриц:

1.4.11. $\begin{array}{ll} x_1 = 3y_1 - y_2 & y_1 = 4z_1 + z_2 \\ x_2 = 2y_1 + 3y_2 & y_2 = -2z_1 + z_2 \end{array}$

1.4.12. $\begin{array}{ll} z_1 = 2x_1 - x_2 & x_1 = y_1 + 2y_2 \\ z_2 = x_1 + 3x_2 & x_2 = -3y_1 + y_2 \end{array}$

1.4.13. $\begin{array}{ll} x_1 = 3y_1 - y_2 & y_1 = 2z_1 + z_2 - 3z_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 - y_3 & y_2 = z_1 + 2z_2 \\ x_3 = 3y_2 + 2y_3 & y_3 = z_1 + 4z_3 \end{array}$

1.4.14. $\begin{array}{ll} z_1 = x_1 + 3x_3 & x_1 = -y_1 + y_2 - y_3 \\ z_2 = 2x_1 - x_2 & x_2 = 2y_1 + 3y_2 \\ z_3 = x_1 + x_2 + x_3 & x_3 = 4y_1 \end{array}$

Найти линейные преобразования, обратные к следующим преобразованиям:

1.4.15. $\begin{array}{l} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = 3y_1 + 4y_2 \end{array}$

1.4.16. $\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{array}$

1.4.17. $\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = 2y_2 + 2y_3 \end{array}$

1.5. Вычисление ранга матрицы.

Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых строк /столбцов/. Он равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров матрицы. Ранг обозначается буквой r.

Если дана матрица порядка $m \times n$, то ранг не может быть больше меньшего из чисел m и n, т.е. $r \le \min(m, n)$. Ранг можно находить путем непосредственного вычисления определителей, составленных из данной матрицы. Покажем это на примере.

<u>Пример 1.</u> Найти ранг матрицы A :

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{Vmatrix}$$

<u>Решение.</u> Составляем определитель второго порядка на основе данной матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix} = 5.$$

Он отличен от нуля, поэтому переходим к составлению определителей третьего порядка, окаймляя определитель второго порядка, не равный нулю, дополнительными строкой и столбцом до тех пор, пока не получим определитель, отличный от нуля:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 10 \end{Vmatrix} = 50 + 8 - 40 - 18 = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 16 & 11 \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 16 & 10 \end{Vmatrix} = -30.$$

Получен определитель третьего порядка, не равный нулю. Переходим к составлению определителей четвертого порядка, окаймляя последний определитель, отличный от нуля, дополнительными строкой и столбцом. В данном случае имеем один определитель четвертого порядка - это определитель данной матрицы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & -2 \end{Vmatrix} = 0.$$

Он равен нулю. Следовательно, для данной матрицы наибольший порядок минора, отличного от нуля, есть третий. Поэтому ранг матрицы равен 3. Если все вычисленные определители k - го порядка, полученные на основе данной матрицы, будут равны нулю, то ранг матрицы равен k-1.

В данном примере r = 3 указывает , что в матрице А линейно-независимы три строки, а именно первая, вторая и четвертая, т.е. те, которые образуют определитель третьего порядка, не равный нулю.

Можно вычислить ранг при помощи элементарных преобразований /преобразований, не изменяющих ранг матрицы/. К ним относятся следующие:

1) перемена местами двух строк /столбцов/ матрицы;

2) умножение любой строки /столбца/ матрицы на произвольное число, отличное от нуля;

3) сложение одной строки /столбца/ матрицы с другой строкой /столбцом/, предварительно умноженной на произвольное число;

4) вычеркивание строки /столбца/, являющейся линейной комбинацией других строк /столбцов/;

5) вычеркивание строки /столбца/, целиком состоящей из нулей.

С помощью элементарных преобразований из исходной матрицы получают единичную. Ранг матрицы равен порядку полученной единичной матрицы. Найдем ранг матрицы А из примера 1 при помощи элементарных преобразований. Получим нули в первом столбце с помощью первой строки. В результате будем иметь две равные строки /вторая и третья/. Одну из них можно вычеркнуть. Последнюю строку разделим на “2” и переставим местами второй и третий столбцы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & -2 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -13 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix} \to$$

Во втором столбце получим нули с помощью второй строки. Первый столбец умножим на “13” и сложим с третьим; второй умножим на “-5” и сложим с третьим. Последнюю строку разделим на “-3”, и с помощью ее получим нули в последнем столбце. В результате будем иметь:

$$\to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Третий столбец, целиком состоящий из нулей, можно вычеркнуть. В полученной матрице по главной диагонали стоят три единицы. Следовательно, ранг матрицы равен 3. Отметим, что при вычислении ранга матрицы при помощи элементарных преобразований мы не всегда можем сказать, какие именно строки /или столбцы/ матрицы линейно-независимы.

Упражнения.

Найти ранг следующих матриц:

1.5.1. $\begin{Vmatrix} -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 7 & 9 & 2 \end{Vmatrix}$

1.5.2. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ 10 & 9 & -5 & 9 \end{Vmatrix}$

1.5.3 $\begin{Vmatrix} -1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 21 & 12 & 11 & 13 \end{Vmatrix}$

1.5.4. $\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$

1.5.5 $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 12 & 3 & 1 \\ 1 & 18 & 24 & 6 & 2 \end{Vmatrix}$

1.5.6. $\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$

1.5.7. $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & -2 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 6 & 4 & 1 & -6 \end{Vmatrix}$

1.5.8. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 9 & 10 & 3 & 14 \\ 8 & 3 & 5 & 3 & 7 \end{Vmatrix}$

Найти ранг следующих матриц при помощи элементарных преобразований.

1.5.9. $\begin{Vmatrix} 25 & 10 & 15 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ 24 & 16 & 12 & 3 \end{Vmatrix}$

1.5.10. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 7 & -2 \\ 0 & 13 & 19 & -5 \end{Vmatrix}$

1.6. Правило Крамера.

Правило Крамера применяется для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными. Система n линейных уравнений с n неизвестными записывается в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Составляется определитель Δ системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если определитель Δ не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1,2,\ldots,n;$$

где Δ_j - определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой в нем j-го столбца столбцом свободных членов уравнений системы.

<u>Упражнения.</u>

Решить системы линейных уравнений по правилу Крамера:

1.6.1. $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5 = 0, \\ &2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 1 = 0, \\ &3x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0. \end{aligned}$

1.6.2. $\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5 = 0, \\ &2x_1 - x_2 + x_3 - 7 = 0, \\ &4x_1 + 3x_2 - x_3 - 9 = 0. \end{aligned}$

1.6.3. $\begin{aligned} &2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ &3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ &3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ &3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{aligned}$

1.6.4. $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ &2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ &-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -6. \end{aligned}$

1.6.5. $\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ &3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ &5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ &7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{aligned}$

1.6.6. $\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ &x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0, \\ &x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{aligned}$

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2,\\
&x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,\\
\text{1.6.7.}\quad &x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2,\\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1,\\
&2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 8,\\
\text{1.6.8.}\quad &3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3,\\
&4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2,\\
&x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3.
\end{aligned}
$$

1.6.9. Проверить, что система уравнений:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,\\
&3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0,\\
&4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0,\\
&13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0
\end{aligned}
$$

имеет решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ и вычислить определитель системы.

1.6.10. Доказать, что система уравнений:

$$
\begin{aligned}
&ax + by + cz + dt = 0,\\
&-bx + ay + dz - ct = 0,\\
&-cx - y + az + bt = 0,\\
&-x + cy - bz + at = 0
\end{aligned}
$$

имеет единственное решение, если a, b, c, d - вещественные числа, не все равные нулю.

1.7. Метод полного исключения неизвестных Жордана-Гаусса.

Методом полного исключения неизвестных Жордана-Гаусса можно решать любую систему линейных уравнений:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{mi}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Прежде всего составляется матрица из коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений этой системы, называемая расширенной матрицей $\widetilde{A}$ системы:

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} & b_i \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right\|.$$

Над матрицей $\widetilde{A}$ производятся следующие элементарные преобразования, в результате которых система уравнений, соответствующая вновь получаемой матрице, остается эквивалентной исходной:

а) перемена местами любых строк матрицы,

б) умножение любой строки матрицы на число, отличное от нуля,

в) прибавление к некоторой строке матрицы другой ее строки, умноженной на любое число,

г) перемена местами любых столбцов (что соответствует перестановке членов, содержащих одноименные неизвестные во всех уравнениях).

В результате этих преобразований получается система, в которой некоторое неизвестное исключено из всех уравнений, кроме одного. К полученной системе снова применяются элементарные преобразования, исключающие другое неизвестное и т.д.

В процессе преобразований могут встретиться несколько случаев.

1. Если на некотором этапе получилась матрица вида:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & d_2 \\ . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & d_n \end{array} \right\|,$$

то процесс вычислений заканчивается. Исходная система имеет единственное решение. Значения соответствующих неизвестных находятся в правой части матрицы.

2. Если на некотором этапе получилась строка, левая часть которой состоит из нулей, а правая не равна нулю, что соответствует уравнению:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = d_i, (d_i \neq 0),$$

то исходная система не имеет решений, так как написанное уравнение не имеет решений, т.е. система несовместна.

3. Если на некотором этапе образовалась строка, целиком состоящая из нулей, что отвечает уравнению:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0,$$

то такую строку можно исключить из матрицы, так как написанное уравнение является тождеством. Наличие нулевой строки свидетельствует о том, что в исходной системе имелось, по крайней мере, одно уравнение, являющееся следствием остальных, то есть получаемое из остальных, путем умножения этих уравнений на некоторые числа и сложения результатов умножения.

4. Если на некотором этапе получилась матрица вида:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{k+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2k+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{kk+1} & \dots & c_{kn} & d_k \end{array} \right\|$$

(k<n), то процесс вычислений заканчивается. Исходная система имеет бесчисленное множество решений. Для получения общего решения оставляется в левой части системы, отвечающей этой матрице, первые “k” неизвестных, остальные члены уравнений переносятся в правую часть к свободным членам.

Если придать неизвестным в правой части общего решения конкретные значения и подсчитать значения неизвестных левой части, то будем иметь частное решение. Если положить все неизвестные в правой части равными нулю, то соответствующее частное решение будет базисным.

<u>Пример.</u> Решить систему линейных уравнений:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 2,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4,$$
$$3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 5.$$

<u>Решение.</u> Будем решать систему методом Жордана-Гаусса.

Составим расширенную матрицу и поменяем местами первую и вторую строки:

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right\|.$$

Приняв коэффициент при неизвестном x_1 в первой строке за направляющий, исключим неизвестное x_1 из остальных уравнений, т.е. умножив первую строку на “-2” и на “-3”, сложим соответствующие результаты со второй и третьей строками полученной матрицы.

Далее принимаем за направляющий элемент “-3” - во второй строке и во втором столбце. Чтобы получить единицу вместо направляющего элемента, разделим вторую строку на “-3”. Умножив полученную строку соответственно на “-2” и на “3”, сложим результаты соответственно с первой и третьей строками, тем самым исключим неизвестное x_2 из первого и третьего уравнения системы:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & -5 & 5 & 5 & -7 \end{array}\right\| \to \left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 7/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -1 & -5/3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right\|.$$

Далее, принимая элемент “-6” в третьей строке и третьем столбце за направляющий, поделим третью строку на “-6”. С помощью этой строки, содержащей единицу, получим нули в третьем столбце в первой и второй строках:

$$\left\|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 14/9 & 7/3 & -5/18 \\ 0 & 1 & 0 & -10/9 & -5/3 & -37/18 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 1/6 \end{array}\right\|.$$

Последняя матрица соответствует системе уравнений:

$$x_1 + \frac{14}{9}x_4 + \frac{7}{3}x_5 = -\frac{5}{18},$$

$$x_2 - \frac{10}{9}x_4 - \frac{5}{3}x_5 = -\frac{37}{18},$$

$$x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{6}.$$

Считая неизвестные x_4 и x_5 свободными, переносим их в правую часть. В результате получаем общее решение системы:

$$x_1 = -\frac{5}{18} - \frac{14}{9}x_4 - \frac{7}{3}x_5,$$

$$x_2 = -\frac{37}{18} + \frac{10}{9}x_4 + \frac{5}{3}x_5,$$

$$x_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_4$$

Давая x_4 и x_5 произвольные значения, получаем бесчисленное множество решений. Пусть x_4=9 и x_5=3, тогда частное решение будет следующим:

$$\left[-21\frac{5}{18};\ 12\frac{17}{18};\ 3\frac{1}{6};\ 9;\ 3\right].$$

При x_4=0 и x_5=0 получаем базисное решение:

$$\left[-\frac{5}{18};\ -\frac{37}{18};\ \frac{1}{6};\ 0;\ 0\right].$$

Подставляя полученные решения в заданную систему уравнений, можно убедиться в правильности вычислений.

Упражнения.

Решить системы линейных уравнений. Выяснить геометрический смысл решения:

1.7.1. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8, \\ 3x_1 - 4x_2 &= -5. \end{aligned}$$

1.7.2. $$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 24, \\ -6x_1 + 8x_2 &= -12. \end{aligned}$$

1.7.3. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 8, \\ 3x_1 + 6x_2 &= 12. \end{aligned}$$

Решить системы уравнений методом полного исключения неизвестных (методом Жордана-Гаусса). Если система является неопределенной, то найти одно из базисных решений и частное решение, не являющееся базисным.

1.7.4. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14. \end{aligned}$$

1.7.5. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -6. \end{aligned}$$

1.7.6. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

1.7.7. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6, \\ 11x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -5. \end{aligned}$$

1.7.8. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 4. \end{aligned}$$

1.7.9. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -3, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 &= 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3. \end{aligned}$$

1.7.10. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 &= 9, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 &= 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= 5. \end{aligned}$$

1.7.11. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 &= 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12. \end{aligned}$$

1.7.12. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$

1.7.13. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1. \end{aligned}$

1.7.14. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}$

1.7.15. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 4. \end{aligned}$

1.7.16. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 &= 7, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 8x_4 + 4x_5 &= 2. \end{aligned}$

1.7.17. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3. \end{aligned}$

1.7.18. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 &= -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 1. \end{aligned}$

1.7.19. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0. \end{aligned}$

1.7.20. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$

1.8. Однородные системы линейных уравнений.

Однородной называется система линейных уравнений, свободные члены которой равны нулю.

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Очевидно, что система однородных уравнений (1) всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$ Это следует также из теоремы Кронекера - Капелли: в случае однородной системы r(A)=r($\widetilde{A}$).

При решении системы однородных уравнений можно поставить вопрос: при каком условии однородная система (1) является неопределенной, т.е. имеет ненулевые решения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы система (1) имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие r(A)<n.

Действительно, если r(A)=n, то система имеет единственное и, значит, только нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$

Если r(A)<n, то система (1) является неопределенной (несовместной она быть не может) и, значит, имеет бесчисленное множество решений.

Пусть $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ - какое-нибудь ненулевое решение однородной системы (1). Представим это решение как вектор-строку $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тогда $\lambda_1\overline{\alpha} = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_1\alpha_2, \ldots, \lambda_1\alpha_n)$ тоже, очевидно, будет решением системы (1). Далее, если $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ какое-то другое решение системы (1), отличное от $\overline{\alpha}$, то при любых λ_1 и λ_2 линейная комбинация

$$\lambda_1\overline{\alpha} + \lambda_2\overline{\beta} = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1, \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2, \ldots, \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n)$$ данных решений тоже будет решением системы, так как если

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = 0,$$

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n = 0,$$

то и $a_{i1}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1) + a_{i2}(\lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2) + \ldots + a_{in}(\lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n) = 0$.

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы (1) тоже будет ее решением.

Определение. Линейно независимая система решений $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$, k=n-r(A) системы (1) называется фундаментальной, если каждое решение системы (1) является линейной комбинацией решений $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$.

Теорема. Если r(A)<n , то система (1) обладает фундаментальными системами решений.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

и соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Пусть $\overline{U}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - какое-то решение системы (2) и $\overline{U}_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ любое другое ее решение, отличное от $\overline{U}_1$. Очевидно, что разность $\overline{U}_1 - \overline{U}_2 = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ будет решением системы (3), и если $\overline{U}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ - произвольное решение однородной системы (3), то очевидно, что $\overline{U}_1 + \overline{U}_3 = (\alpha_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \gamma_2, \ldots, \alpha_n + \gamma_n)$ является решением системы (2). Отсюда следует, что все решения системы (2) можно получить, прибавляя к одному какому-нибудь ее решению всевозможные решения однородной системы (3).

Таким образом, общее решение системы (2) равно линейной комбинации общего решения однородной системы (3) и произвольного, но фиксированного решения системы (2). Если $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \ldots, \overline{U}_k$ фундаментальная система решений однородной системы (3) и $\overline{U}_0$ - произвольное фиксированное решение системы (2), то общее решение системы (2) имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_0 + \lambda_1\overline{U}_1 + \lambda_2\overline{U}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{U}_k$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ - произвольные числа.

<u>Пример.</u> Найти фундаментальную систему однородной системы уравнений.

$$\begin{aligned} &-2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ &9x_1 - 39x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{aligned}$$

Решение. Решаем систему методом Жордана-Гаусса:

$$\widetilde{A}^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 9 & -39 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right); \quad \widetilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 19 & -49 & -23 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\widetilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -60/19 & 49/19 & 1 & 0 \\ 1 & -49/19 & -23/19 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Общее решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{49}{19}x_2 + \frac{23}{19}x_3,$$

$$x_4 = \frac{60}{19}x_2 - \frac{49}{19}x_3 .$$

Решение $\overline{U}_1$ получим, придавая свободным неизвестным значения $x_2 = 1, x_3 = 0$: $\overline{U}_1 = \left(\frac{49}{19},\ 1,\ 0,\ \frac{60}{19}\right)$, и решение $\overline{U}_2$ получим, полагая $x_2 = 0, x_3 = 1$: $\overline{U}_2 = \left(\frac{23}{19},\ 0,\ 1,\ -\frac{49}{19}\right)$. Таким образом, одна из фундаментальных систем решений имеет вид:

$$\overline{U}_1 = \left(\frac{49}{19},\ 1,\ 0,\ \frac{60}{19}\right),\ \overline{U}_2 = \left(\frac{23}{19},\ 0,\ 1,\ -\frac{49}{19}\right).$$

Общее решение системы можно представить в следующем виде:

$\overline{U} = \lambda_1\overline{U}_1 + \lambda_2\overline{U}_2 = \left(\frac{49}{19}\lambda_1 + \frac{23}{19}\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_2\ ,\frac{60}{19}\lambda_1 - \frac{49}{19}\lambda_2\right)$, где λ_1, λ_2 - произвольные числа. Например, полагая λ_1=19 и λ_2=19, получим одно из частных решений: $x_1 = 72,\ x_2 = 19,\ x_3 = 19,\ x_4 = 11.$

1.9. Действия над векторами.

n - мерным вектором называется упорядоченная система n чисел:

$$\overline{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

где a_i (i=1,2,...,n) есть компоненты вектора $\overline{A}$.

Два вектора $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называются равными, если равны их соответствующие компоненты (координаты):

$$a_i = b_i, \qquad \text{где} \quad i=1,2,...,n.$$

Сумой двух векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называется вектор $\overline{C}$, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$c_i = a_i + b_i, \text{ где } i=1,2,...,n.$$

Аналогично определяется и разность векторов.

Чтобы вектор $\overline{A}$ умножить на постоянное число α, необходимо каждую его компоненту умножить на это число.

Модуль (или длина вектора) равен арифметическому значению корня квадратного из суммы квадратов соответствующих координат:

$$\left|\,\overline{A}\,\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ .$$

Скалярным произведением двух векторов $\overline{A}$ и $\overline{B}$ называется произведение их длин, умноженных на косинус угла между векторами:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \left|\overline{A}\right| \cdot \left|\overline{B}\right| \cdot \cos\alpha,$$

где α - угол между векторами $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Упражнения.

1.9.1. Даны векторы $\overline{A}_1 = (3,\ 4)$ и $\overline{A}_2 = (4,\ 3)$. Найти $\overline{A}_1 + \overline{A}_2$, $\overline{A}_1 - \overline{A}_2$, $3\overline{A}_1 + 2\overline{A}_2$, $2\overline{A}_1 - 4\overline{A}_2$, $\left|\overline{A}_1\right|$, $\left|\overline{A}_2\right|$ и угол между данными векторами. Полученные ответы проверить графически.

1.9.2. Выполнить те же действия, что в задаче 1.9.1, над векторами $\overline{A}_1 = (4,\ 2)$ и $\overline{A}_2 = (1,\ 2)$.

Íайти скалярное произведение векторов, угол между ними, а также $\overline{P}_1 - \overline{P}_2$ и $3\overline{P}_1 + 2\overline{P}_2$.

1.9.3. $\overline{P}_1 = (3,\ 4,\ 0,\ 2)$ и $\overline{P}_2 = (0,\ 1,\ -2,\ 2)$.

1.9.4. $\overline{P}_1 = (2,\ 1,\ 3,\ 1)$ и $\overline{P}_2 = (1,\ 2,\ 0,\ 1)$.

1.9.5. $\overline{P}_1 = (2,\ 0,\ 1,\ 3,\ -1)$ и $\overline{P}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1)$.

1.9.6. Из склада в магазин №1 было перевезено 30 т груза по 20 коп. за тонну, в магазин №2 - 50 т по 2 коп. за тонну, в магазин №3 - 15 т по 30 коп. и в магазин №4 - 100 т по 5 коп. Записать в виде векторов перевезенный груз и соответствующие ему цены перевозок. С помощью скалярного произведения найти общие затраты на перевозку.

1.10. Линейная зависимость и независимость векторов.

Система векторов $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_i, \ldots, \overline{P}_n$ называется линейно-зависимой, если хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных, т.е. некоторый вектор $\overline{P}_i$ можно представить в виде:

$$\overline{P}_i = \alpha_1 \cdot \overline{P}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{P}_2 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot \overline{P}_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot \overline{P}_{i+1} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{P}_n \ ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ - числовые множители.

В противоположном случае система векторов называется линейно-независимой. Существует и другое определение линейной зависимости системы векторов. Система векторов $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ называется линейно-зависимой, если существует такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, по крайней мере одно из которых отлично от нуля, что имеет место равенство:

$$\lambda_1 \cdot \overline{P}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{P}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{P}_n = \overline{0}.$$

Если же это равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов линейно-независима.

В *n*-мерном пространстве существует не более *n* линейно-независимых векторов. Любая система векторов, состоящая из числа векторов, больше *n*, является линейно-зависимой в этом пространстве.

<u>Пример 1.</u> Определить, является ли система векторов $\overline{P}_1 = (3,0,1); \quad \overline{P}_1 = (4,1,-2); \quad \overline{P}_3 = (1,4,3); \quad \overline{P}_4 = (0,2,-1)$ линейно-зависимой. Если является, то один из векторов выразить как линейную комбинацию других.

<u>Решение.</u> Имеем четыре вектора в трехмерном пространстве. Следовательно, данная система векторов является линейно-зависимой. Можно решить эту задачу, воспользовавшись вторым определением линейной зависимости системы векторов. Запишем уравнение:

$$\lambda_1 \cdot \overline{P}_1 + \lambda_2 \cdot \overline{P}_2 + \lambda_3 \cdot \overline{P}_3 + \lambda_4 \cdot \overline{P}_4 = \overline{0}.$$

Определим значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Для этого в равенство подставим данные вектора и произведем соответствующие действия:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Умножим каждый вектор на λ_i и сложим полученные векторы. Учитывая, что два вектора равны в том случае, если равны их соответствующие координаты, получим однородную систему линейных уравнений:

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$
$$\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

Решаем данную систему методом Жордана-Гаусса:

$$\left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ \mathbf{1} & -2 & 3 & -1 & 0 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 3 & 0 \end{array} \right\| \to \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-48} & -17 & 0 \end{array} \right\| \to$$

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{43}{48} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{48} & 0 \end{array} \right\|.$$

На первом шаге принимаем «1» в третьей строке за направляющий элемент, меняем местами данную строку с первой и получаем нули в первом столбце. На втором шаге принимаем за направляющий элемент «1», стоящий во второй строке и во втором столбце. С помощью этой строки получаем нули во втором столбце. На третьем шаге принимаем «-48» за направляющий элемент и делим третью строку на «-48». С помощью полученной строки получаем нули в третьем столбце. Последняя матрица соответствует системе уравнений:

$$\lambda_1 - \frac{43}{48}\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_2 + \frac{7}{12}\lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_3 + \frac{17}{48}\lambda_4 = 0,$$

откуда получаем:

$$\lambda_1 = \frac{43}{48}\lambda_4;\ \lambda_2 = -\frac{7}{12}\lambda_4;\ \lambda_3 = -\frac{17}{48}\lambda_4.$$

Найденные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ подставим в исходное равенство:

$$\frac{43}{48}\lambda_4\overline{P_1} - \frac{7}{12}\lambda_4\overline{P_2} - \frac{17}{48}\lambda_4\overline{P_3} + \lambda_4\overline{P_4} = \overline{0}.$$

Полагая $\lambda_4 \neq 0$, разделим полученное равенство на λ_4. В результате будем иметь следующую зависимость между векторами:

$$\frac{43}{48}\overline{P_1} - \frac{7}{12}\overline{P_2} - \frac{17}{48}\overline{P_3} + \overline{P_4} = \overline{0}.$$

Заметим, что из полученного равенства любой из векторов можно представить, как линейную комбинацию остальных векторов, например:

$$\overline{P_4} = -\frac{43}{48}\overline{P_1} + \frac{7}{12}\overline{P_2} + \frac{17}{48}\overline{P_3}.$$

Упражнения.

1.10.1. Найти линейную комбинацию $3\overline{A_1} + 5\overline{A_2} - \overline{A_3}$ векторов $\overline{A_1} = (4, 1, 4, -2)$, $\overline{A_2} = (1, 2, -3, 2)$, $\overline{A_3} = (16, 9, 1, -3)$.

1.10.2. Найти вектор $\overline{X}$ из уравнения: $\overline{P_1} + 2\overline{P_2} + 3\overline{P_3} + 4\overline{X} = \overline{0}$, если $\overline{P_1} = (5, -8, -1, 2)$, $\overline{P_2} = (2, -1, 4, -3)$ и $\overline{P_3} = (-3,\ 2,\ -5,\ 4)$.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов линейно-зависимыми или линейно-независимыми. Если система векторов линейно-зависима, то установить эту зависимость:

1.10.3. $\overline{P_1} = (3,\ 5,\ 0,\ 4)$ и $\overline{P_2} = (0,\ 1,\ 2,\ -3)$.

1.10.4. $\overline{P_1} = (1,\ 2,\ 4)$, $\overline{P_2} = (3,\ 5,\ 1)$ и $\overline{P_3} = (0,\ 1,\ -1)$.

1.10.5. $\overline{P_1} = (2,\ 1,\ 3)$, $\overline{P_2} = (5,\ 3,\ 2)$ и $\overline{P_3} = (1,\ 4,\ 3)$.

1.10.6. $\overline{P_1} = (3,\ 4,\ -5)$, $\overline{P_2} = (8,\ 7,\ -2)$ и $\overline{P_3} = (1,\ 4,\ 3)$ $\overline{P_3} = (2,\ -1,\ 8)$.

1.10.7. $\overline{P_1} = (2,\ -5,\ 1,\ 2)$, $\overline{P_2} = (-3,\ 7,\ -1,\ 4)$, $\overline{P_3} = (5,\ -9,\ 2,\ 7)$ и $\overline{P_4} = (4,\ -6,\ 1,\ 2)$.

1.10.8. $\overline{P_1} = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$, $\overline{P_2} = (2,\ -2,\ 1,\ 3)$, $\overline{P_3} = (6,\ -3,\ 3,\ 9)$ и $\overline{P_4} = (2,\ -1,\ 1,\ 3)$.

1.10.9. Найти все значения θ, при которых вектор $\overline{P} = (7,\ -2,\ \theta)$ линейно выражается через векторы: $\overline{P_1} = (2,\ 3,\ 5)$, $\overline{P_2} = (3,\ 7,\ 8)$ и $\overline{P_3} = (1,\ -6,\ 1)$.

1.10.10. Найти все значения θ, при которых вектор $\overline{A} = (5,\ 9,\ \theta)$ линейно выражается через векторы: $\overline{A_1} = (4,\ 4,\ 3)$, $\overline{A_2} = (7,\ 2,\ 1)$ и $\overline{A_3} = (4,\ 1,\ 6)$.

Установить линейную зависимость следующей системы векторов и выразить один из векторов системы в виде линейной комбинации остальных:

1.10.11. $\overline{A_1} = (5,\ -3,\ 2,\ 4)$, $\overline{A_2} = (2,\ -1,\ 3,\ 5)$ и $\overline{A_3} = (-4,\ -3,\ -5,\ -7)$.

1.10.12. $\overline{A_1} = (8,\ 7,\ 4,\ 5)$, $\overline{A_2} = (3,\ 2,\ 1,\ 4)$ и $\overline{A_3} = (0,\ 5,\ 4,\ -17)$.

1.10.13. $\overline{A_1} = (3,\ 2,\ 1)$, $\overline{A_2} = (0, 1, 2)$, $\overline{A_3} = (1, -1, -2)$ и $\overline{A_4} = (9,\ 2,\ -2)$.

1.10.14. $\overline{A_1} = (3,\ 1,\ 4)$, $\overline{A_2} = (-1, 2, 0)$, $\overline{A_3} = (2, 1, -7)$ и $\overline{A_4} = (11,\ -3,\ 1)$.

1.10.15. $\overline{A_1} = (4,\ -5,\ 2,\ 6)$, $\overline{A_2} = (2, -2, 1, 3)$, $\overline{A_3} = (2, -2, 1, 3)$ и $\overline{A_4} = (4,\ -1,\ 5,\ 6)$.

1.10.16. $\overline{A_1} = (1,\ 2,\ 1,\ 1)$, $\overline{A_2} = (1, 1, 1, 1)$, $\overline{A_3} = (1, 1, -1, -1)$ $\overline{A_4} = (1,\ -1,\ 1,\ -1)$ и $\overline{A_5} = (1,\ -1,\ -1,\ 1)$.

1.11. Базис системы векторов. Переход от одного базиса к другому.

Базисом системы векторов называется такая ее подсистема, которая:

1) является линейно-независимой;
2) любой вектор из системы векторов можно выразить как линейную комбинацию этой подсистемы векторов.

Базис в n-мерном пространстве содержит n линейно-независимых векторов. В пространстве (мы рассматриваем арифметические пространства) существует бесчисленное множество базисов. Одним из базисов пространства является система единичных векторов $\overline{e}_i$ (i=1,2,...,n), у которых все компоненты, кроме i-той, равны нулю, а i-я компонента равна единице. Любой вектор пространства можно представить как линейную комбинацию векторов базиса. Например, если кроме системы единичных векторов:

$$\begin{aligned}
\overline{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\overline{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
\overline{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

задан вектор $\overline{P} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то данный вектор можно представить в виде:

$$\overline{P} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n.$$

Коэффициентами разложения данного вектора по векторам базиса являются его координаты. В каждом базисе вектору $\overline{P}$ соответствует строка его координат. Это разложение вектора $\overline{P}$ по данному базису является единственным. Например, если дан базис в n-мерном пространстве в виде системы векторов $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$, отличный от базиса единичных векторов, то разложение вектора $\overline{P}$ в данном базисе будет иным:

$$\overline{P} = y_1\overline{A}_1 + y_2\overline{A}_2 + \ldots + y_n\overline{A}_n\ ,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - координаты вектора $\overline{P}$ в новом базисе.

Рассмотрим задачу перехода от одного базиса к другому.

Пусть в n-мерном пространстве дан базис в виде системы единичных векторов и новый базис в виде системы векторов:

$$\overline{P}_i = (\overline{P}_{i1}, \overline{P}_{i2}, \ldots, \overline{P}_{in}),\ \text{где i=1,2,...,}n.$$

Задан также вектор $\overline{Q} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в старом базисе, т.е. в базисе из единичных векторов. Требуется перейти из старого базиса к новому, т.е. найти координаты единичных векторов, а также координаты вектора $\overline{Q}$ в новом базисе.

Этот переход можно осуществить при помощи метода Жордана-Гаусса. Для этого надо составить матрицу, в которой записать сначала векторы старого базиса, затем нового базиса и, наконец, вектор $\overline{Q}$. Координаты каждого вектора будут записаны в столбце. В результате получим матрицу:

$$\left\| E \mid P \mid \overline{Q} \right\|.$$

Умножая каждую часть матрицы на обратную матрицу P^{-1} слева, будем иметь:

$$\left\| P^{-1}E \mid P^{-1}P \mid P^{-1}\overline{Q} \right\|,$$

$$\text{или } \left\| P^{-1} \mid E \mid P^{-1}\overline{Q} \right\|,$$

т.е. в первой части получим в каждом столбце координаты соответствующего вектора старого базиса в новом базисе, во второй - новый базис в виде единичных векторов, в третьей - координаты вектора $\overline{Q}$ в новом базисе.

Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы путем преобразований методом Жордана-Гаусса получить во второй части единичную матрицу. Если это нельзя сделать, то система векторов $\overline{P_i}$ (i=1,2,...,n) является линейно-зависимой и, следовательно, не образует базис.

Пример. Даны базисы в виде системы векторов $\overline{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$ и системы векторов $\overline{P}_1 = (2,\ 4,\ 0)$, $\overline{P}_2 = (3, 1, 2)$ и $\overline{P}_3 = (1,\ 2,\ -1)$. Выразить векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ через векторы $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$. Найти во втором базисе координаты вектора $\overline{X} = (0,\ -5,\ 5)$, заданного в первом базисе.

Выразим векторы $\overline{P}$ через $\overline{e}$:

$$\overline{P}_1 = 2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2$$

$$\overline{P}_2 = 3\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$$

$$\overline{P}_3 = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 - \overline{e}_3$$

Таблица 1.11.1.

Базис	$\overline{e}_1$	$\overline{e}_2$	$\overline{e}_3$	$\overline{P}_1$	$\overline{P}_2$	$\overline{P}_3$	$\overline{X}$	примечание
$\overline{e}_1$	1	0	0	2	3	1	0	1 строка
$\overline{e}_2$	0	1	0	4	1	2	-5	2 строка
$\overline{e}_3$	0	0	1	0	2	-1	5	3 строка
$\overline{P}_1$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4стр.=1стр.:2
$\overline{e}_2$	-2	1	0	0	-5	0	-5	5стр.=2стр.+ +4стр.·(-4)
$\overline{e}_3$	0	0	1	0	2	-1	5	6стр.=3стр.
$\overline{P}_1$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	7стр.=4стр.+8стр. ·(-3/2)
$\overline{P}_2$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	0	1	8стр.=5стр.:(-5)
$\overline{e}_3$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	0	-1	3	9стр.=6стр.+8стр. ·(-2)
$\overline{P}_1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	10стр.=7стр.+ +12стр. ·(-1/2)
$\overline{P}_2$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	0	1	11стр.=8стр.
$\overline{P}_3$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	-1	0	0	1	-3	12стр.=9стр.: :(-1)

Решение. Все вычисления будем производить в таблице 1.11.1., в столбцах которой запишем координаты данных векторов в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$.

В таблице слева оставим одну графу для записи базисных векторов. Каждым шагом метода Жордана-Гаусса заменяем один базисный вектор другим. Все произведенные действия над строками указаны в примечаниях таблицы. Отметим, что необязательно первый шаг начинать с введения в базис вектора $\overline{P}_1$. Удобнее ввести в базис сначала вектор $\overline{P}_3$, так как он имеет в первой строке «1». В последнем шаге записаны конечные результаты. Так, вектор $\overline{e}_1$ в новом базисе имеет координаты $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}\right)$; т.е.

$$\overline{e}_1 = -\frac{1}{2}\overline{P}_1 + \frac{2}{5}\overline{P}_2 + \frac{4}{5}\overline{P}_3.$$

Аналогично запишем и разложения других единичных векторов по векторам нового базиса:

$$\overline{e}_2 = \frac{1}{2}\overline{P}_1 - \frac{1}{5}\overline{P}_2 - \frac{2}{5}\overline{P}_3,$$

$$\overline{e}_3 = \frac{1}{2}\overline{P}_1 - \overline{P}_3.$$

Вектор $\overline{X}$ в новом базисе имеет координаты (0, 1, -3).

Упражнения

1.11.1. Написать разложение вектора $\overline{P}_1 = (3,\ 4,\ -2)$ в базисе $\overline{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\overline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (0, 0, 1)$.

1.11.2. Показать, что векторы $\overline{A}_1 = (1,\ 2)$ и $\overline{A}_2 = (0,\ 3)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{X} = (3,\ 0)$ в этом базисе. Результаты проверить графически.

1.11.3. Векторы $\overline{A}_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $\overline{A}_2 = (1, 1, 2)$, $\overline{A}_3 = (1, 2, 3)$ и $\overline{P} = (6,\ 9,\ 14)$ заданы в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ - образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{P}$ в этом базисе.

1.11.4. Показать, что векторы $\overline{P}_1 = (2,\ 1,\ -3)$, $\overline{P}_2 = (3,\ 2,\ -5)$, $\overline{P}_3 = (1,\ -1,\ 1)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{X} = (6,\ 2,\ -7)$ в этом базисе.

1.11.5. Показать, что векторы $\overline{P}_1 = (1, 0, 3)$, $\overline{P}_2 = (-2, 1, 1)$ и $\overline{P}_3 = (0, 2, 4)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{x} = (-9, 6, 11)$ в этом базисе.

1.11.6. Показать, что векторы $\overline{P}_1 = (1, 2, -1, 2)$, $\overline{P}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\overline{P}_3 = (1, 2, 1, 3)$ и $\overline{P}_4 = (1, 3, -1, 1)$ образуют базис. Найти координаты вектора $\overline{P} = (7, 14, -1, 1)$ в этом базисе.

Доказать, что каждая из двух систем вектоов является базисом. Найти связь между координатами векторов обоих базисов.

1.11.7. $\overline{e}_1 = (1, 0), \overline{e}_2 = (0, 1), \overline{a}_1 = (2, 3)$ и $\overline{a}_2 = (1, 2)$;

1.11.8. $\overline{e}_1 = (1, 0, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0), \overline{e}_3 = (0, 0, 1)$, $\overline{A}_1 = (-1, 0, 2), \overline{A}_2 = (2, 1, 0)$ и $\overline{A}_3 = (4, 2, 1)$;

1.11.9. $\overline{e}_1 = (4, 2, 1), \overline{e}_2 = (2, 0, 3), \overline{e}_3 = (0, 7, 1)$, $\overline{A}_1 = (3, 1, 9), \overline{A}_2 = (0, 2, 1)$ и $\overline{A}_3 = (-1, 1, -6)$;

1.11.10. $\overline{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \overline{e}_2 = (1, 2, 1, 1), \overline{e}_3 = (1, 1, 2, 1), \overline{e}_4 = (1, 3, 2, 3), \overline{A}_1 = (1, 0, 3, 3)$, $\overline{A}_2 = (-2, -3, -5, -4), \overline{A}_3 = (2, 2, 5, 4)$ и $\overline{A}_4 = (-2, -3, -4, -4)$;

1.11.11. Даны векторы $\overline{P}_1 = (1, 3), \overline{P}_2 = (2, 4), \overline{P} = (4, 3)$ в базисе $\overline{e}_1 = (1, 0)$ и $\overline{e}_2 = (0, 1)$. Показать, что векторы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ образуют базис. Найти связь между векторами нового и старого базисов. Найти координаты вектора $\overline{P}$ в новом базисе.

1.11.12. Даны векторы: $\overline{P}_1 = (1, 1, 1), \overline{P}_2 = (1, 2, 1), \overline{P}_3 = (3, 2, 1)$ - базис и $\overline{P}_4 = (0, 2, 2)$ в базисе $\overline{e}_1 = (1, 0, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0), \overline{e}_3 = (0, 0, 1)$. Найти связь между новым и старым базисом. Найти координаты вектора $\overline{P}_4$ в новом базисе.

1.11.13. Даны векторы $\overline{P}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{P}_2 = (1, 1, 2)$, $\overline{P}_3 = (1, 2, 3)$, $\overline{P}_4 = (-6, 3, 1), \overline{A}_1 = (1, -1, 0), \overline{A}_2 = (2, 1, 3), \overline{A}_3 = (1, 2, -1)$. Показать, что векторы $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ образуют базис. Выразить в этом базисе все остальные векторы.

1.12. Квадратичные формы.

<u>Определение:</u> Квадратичной формой $f(\bar{x})$ от n переменных(неизвестных) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется алгебраическая сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением 2-х различных переменных. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

Запишем квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в следующем общем виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \\ + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + \ldots + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2; \text{ где } a_{ij} = a_{ji} \text{ при } i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Такая запись квадратичной формы называется правильной.

Матрица $A = (a_{ij})_{nn}$ называется матрицей квадратичной формы. Это симметрическая матрица.

<u>Пример:</u> $f(\bar{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Если A- невырожденная матрица, то квадратичная форма $f(\bar{x})$ называется невырожденной квадратичной формой.

Квадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Вынося x_1 из первой строки записи, x_2- из второй,..., x_n - из последней, получим:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\ + \ldots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$= x' Ax$, где x'- транспонированная от x .

<u>Линейное преобразование переменных в квадратичной форме.</u>

Задана квадратичная форма $f(\bar{x}) = x' Ax$ и задан линейный оператор $\tilde{Q}$ с матрицей $Q = (q_{ik})$ $i, k = \overline{1, n}$, который преобразует переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Рассмотрим, как изменится матрица квадратичной формы: $x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k \quad i = \overline{1,n}$ или в матричном виде $x = Qy$. Протранспонируем:

$x' = y'Q'$

$f = x'Ax = y'Q'AQy = y'By$, где $B = Q'AQ$.

То есть матрица A при действии оператора $\widetilde{Q}$ преобразуется в матрицу B.

<u>Пример:</u> Осуществить над квадратичной формой $f(\bar{x}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$ линейное преобразование, заданное матрицей $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$\bar{x} = By \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Отсюда $x_1 = y_1 + 2y_2$; $x_2 = 3y_1 + 4y_2$

$$f(y_1y_2) = 2(y_1 + 2y_2)^2 - 4(y_1 + 2y_2)(3y_1 + 4y_2) + 3(3y_1 + 4y_2)^2 =$$
$$= 17y_1^2 + 40y_1y_2 + 24y_2^2;$$

Если матрица Q невырождена, то линейные преобразования x_i являются невырожденными.

Если квадратичная форма f невырожденными линейными преобразованиями приведена к сумме квадратов переменных, то этот вид называется каноническим, т.е. $f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + \ldots + b_ny_n^2$.

<u>Теорема:</u> Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду.

<u>Доказательство методом индукции по числу неизвестных:</u>

I. Если $f = a_{11}x_1^2$, то утверждение справедливо.

II. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для квадратичной формы f, зависимой от n неизвестных.

1) Рассмотрим квадратичную форму от n неизвестных:
$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
2) Предположим, что в квадратичной форме содержится переменная x_i^2 с коэффициентом $a_{ii} \neq 0$. Для определенности положим $a_{11} \neq 0$.
3) Выделим в квадратичной форме f элементы, содержащие неизвестное x_1 $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$ и выделим в данном выражении полный квадрат:
$$\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)^2$$

4) Раскроем вторую скобку и введем обозначения $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \quad y_2 = x_2; \quad y_3 = x_3; \ldots; \quad y_n = x_n$.

В результате получим:

$f = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + g(y_2, y_3, \ldots, y_n)$, где $g(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ квадратичная форма,

т.е. квадратичная форма зависит от n-1 неизвестных.

И по предположению индукции утверждение теоремы справедливо для g от n-1 переменных, т.е. f от n переменных может быть приведена к каноническому виду невырожденными линейными преобразованиями.

Пример:

$$f(\bar{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = -(x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + (-x_2 + 2x_3)^2 + $$
$$+3x_3^2 + 2x_2x_3 = y_1^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 = y_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 7x_3^2$$

$$y_1^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 + 7y_3^2 = y_1^2 + (y_2 - y_3)^2 - y_3^2 + 7y_3^2 = y_1^2 + (y_2 - y_3)^2 = z_1^2 + $$
$$+z_2^2 + 6z_3^2.$$

Определенность квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad |\,a_{11}\,| = -1 < 0; \quad |\,a_{22}\,| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0;$$

$$|\,a_{33}\,| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 - 3 = -6 < 0$$

Вывод: квадратичная неопределенная форма.

III. При доказательстве данной теоремы мы предполагали, что квадратичная форма содержит хотя бы один элемент $a_{ii} \neq 0$. Рассмотрим случай, когда квадратичная форма f не содержит квадратов переменных, т.е. $a_{ii} = 0, \quad i = \overline{1, n}$.

1) Осуществим над квадратичной формой f следующие преобразования в произведении $2a_{ij}x_ix_j$ представим $x_i = z_1 - z_2; x_j = z_1 + z_2$. Тогда, $2a_{ij}x_ix_j = 2a_{ij}z_1^2 - 2a_{ij}z_2^2$. Остальные переменные $x_k \ (k \neq i, j; k = \overline{1, n})$ положим равными $z_k \ (k \neq 1, 2)$. В этом случае в квадратичной форме появляется отличный от нуля коэффициент при квадрате переменной, например при z_1^2.

Если в квадратичной форме, преобразованной к каноническому виду, коэффициенты при квадратах неизвестных равны, то такой вид квадратичной формы называется нормальным.

Закон инерции квадратичных форм.

Число положительных и число отрицательных коэффициентов при квадратах в нормальном виде квадратичной формы зависит от выбора невырожденного линейного преобразования, с помощью которого f приведена к нормальному виду.

Определение:
Число положительных коэффициентов при квадратах называется положительным индексом инерции, а число отрицательных - отрицательным индексом инерции.
Разность между ними называется сигнатурой.

Положительно определенные формы.

Определение:
Квадратичная форма f от n неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, $f > 0$ $(f < 0)$, и положительно(отрицательно) полуопределенной, если $f \geq 0$ $(f \leq 0)$. Во всех остальных случаях квадратичная форма называется неопределенной.
Очевидно, что, если форма f является положительно определенной, то ее нормальный вид содержит только квадраты переменных, входящих с коэффициентом +1.
Если $f < 0$, то с коэффициентом (–1).

Рассмотрим квадратичную форму $f = x' Ax$, где A- квадратная матрица порядка n.
Введем следующие понятия: назовем главными минорами порядка 1,2,...,n миноры, стоящие в левом верхнем углу матрицы A, т.е.:

$$\Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ldots; \quad \Delta_n = |\,A\,|$$

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Теорема: Для того, чтобы квадратичная форма f была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы A были строго положительны.

Из данной теоремы вытекает необходимое и достаточное условие отрицательности квадратичной формы:

Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы коэффициентов данной формы. чередовались знаками, начиная с отрицательного, т.е: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \ldots.$

Часть № 2.

Применение матричного исчисления к решению некоторых экономических задач.

2.1. Использование операций над матрицами.

Пример 1. Рассмотрим пример умножения матрицы на вектор. Анализируя продолжительность подписки на различные газеты, исследователи охарактеризовали вероятности перехода подписчика от одной газеты к другой в зависимости от продолжительности подписки с помощью соответствующей матрицы. Упрощенный вариант этой матрицы имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице для вероятностей перехода данные структурированы в соответствии с продолжительностью подписки: до одного года, от одного года до двух лет, более двух лет и, наконец, аннулированные подписки.

Предположим, что известно распределение 1000 подписчиков по этим категориям: 500 – принадлежат к 1-й категории, 200 – ко 2-й категории, 300 – к 3-й категории. Тогда вся группа, состоящая из 1000 подписчиков, может быть описана вектором-строкой:

$$X' = (500, 200, 300, 0)$$

Для того, чтобы определить вероятностное количество подписчиков в каждой из категорий через год, умножим X' на матрицу вероятностей перехода P:

$$X' \cdot P = (500, 200, 300, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 350, 430, 220).$$

Вектор, полученный после умножения, показывает, что из первоначальной тысячи подписчиков через год 350, вероятно, будут принадлежать к категории 2, 430- к категории 3 и 220 к категории 4.

Пример 2. Некоторое производственное объединение должно выпустить три вида продукции А1, А2, А3 в количествах, выраженных в процентах к плану, соответственно: 20%, 30% и 50%.

В объединении участвуют четыре предприятия, причем по плану предприятие №1 должно выпустить 30% всей продукции А1, 40% всей продукции А2 и 10% всей продукции А3. План для остальных предприятий соответственно следующий:

для предприятия №2 - 40% А1, 10% А2, 30% А3;
для предприятия №3 - 30% А1, 20% А2, 30% А3;
для предприятия №4 - 0% А1, 30% А2, 30% А3.

Требуется найти процент выполнения плана объединения каждым предприятием.

Решение:

Для решения задачи применим операции над матрицами. Обозначим через Xj (j=1,2,3,4) количество продукции выпускаемой по плану j-ым предприятием, тогда получим следующее матричное уравнение:

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{matrix}\right\| \cdot 100\%$$

Выполнив операцию умножения матриц в правой части, будем иметь следующие значения x_j: $x_1 = 23\%,\ x_2 = 26\%,\ x_3 = 27\%,\ x_4 = 24\%$.

Матричная алгебра находит большое применение при балансовых расчетах.

Пусть в народном хозяйстве имеется n отраслей. Проанализируем взаимоотношения между ними. Они выражаются в виде поставок друг другу соответствующей продукции (в денежном выражении) в течение некоторого периода, например, одного года.

Для i-й отрасли часть продукции x_{i1} идет на потребление первой отраслью, x_{i2} – второй и т.д. Вообще x_{ij} – материальные затраты i-ой отрасли, потребляемые j-той отраслью $(x_{ij} \geq 0)$; x_{ii} - внутреннее потребление i-ой отрасли (очень часто x_{ii}).

Пусть y_i – стоимость товаров i-ой отрасли, идущих на непроизводственное потребление (личное и общественное), накопление и экспорт - “конечный спрос”.

Стоимость всего производства (валовая продукция) i-ой отрасли x_i равна сумме соответствующих затрат:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ii} + \ldots + x_{ij} + \ldots + x_{in} + y_i$$

Межотраслевые взаимоотношения записываются в виде системы уравнений:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \text{ , где i=1,2,...,n.} \qquad (1)$$

Коэффициент $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ показывает количество продукции i-ой отрасли, используемой для производства единицы продукции j-той отрасли и считается постоянным в течении планируемого периода.

Подставляя $x_i = \sum^{n} x_{ij} + y_i$ в уравнение (1) получим:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \text{ , где i=1,2,...,n.}$$

Последнюю систему можно записать в матричной форме:

X = AX + Y 2)

где $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$ - матрица прямых затрат.

Уравнение (2) межотраслевых связей можно записать в другом виде:

$$(E - A) \cdot X = Y \qquad (3)$$

Определим, сколько продукции должна выпускать каждая отрасль, если известен "конечный спрос" отраслей. Решим матричное уравнение (3) относительно x. Для этого умножим его на обратную матрицу $(E - A)^{-1}$ слева:

$$(E - A)^{-1} \cdot (E - A) \cdot X = (E - A)^{-1} \cdot Y,$$

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y.$$

Матрица $S = (E - A)^{-1} = \| S_{ij} \|_{n \times n}$ называется матрицей полных затрат. Элемент S_{ij} показывает количество валовой продукции i-той отрасли, затрачиваемое на единицу конечной продукции j-ой отрасли. Матрица S – A называется матрицей косвенных затрат.

Пример 3. Рассмотрим систему двух отраслей экономики: промышленности и сельского хозяйства. Пусть матрица прямых затрат имеет вид:

$$A = \begin{Vmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{Vmatrix},$$

и задан "конечный спрос" каждой отрасли соответственно 330 тыс. руб. и 66 тыс. руб. Каков должен быть валовый выпуск каждой отрасли?

Решение:

Составим матрицу E – A:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0.6 & -0.5 \\ -0.3 & 0.8 \end{Vmatrix}$$

Найдем обратную матрицу для $\| E - A \|$ с помощью присоединенной матрицы:

Определитель $| E - A | = 0.48 - 0.15 = 0.33,$

$$\| E - A \|^{*} = \begin{Vmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.6 \end{Vmatrix}$$

Матрица полных затрат будет следующей:

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ \frac{30}{33} & \frac{60}{33} \end{Vmatrix}$$

Валовой выпуск каждой отрасли составляет: $(E - A)^{-1} \cdot Y = X$

$$\begin{Vmatrix} \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ \frac{30}{33} & \frac{60}{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 330 \\ 66 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{80}{33} \cdot 330 + \frac{50}{33} \cdot 66 \\ \frac{10}{11} \cdot 330 + \frac{20}{11} \cdot 66 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 900 \\ 420 \end{Vmatrix}$$

Таким образом выпуск промышленности составляет 900 тыс. руб., а сельского хозяйства – 420 тыс. руб.

Матрица косвенных затрат имеет вид:

$$\| S - A \| = \begin{Vmatrix} \frac{80}{33} & \frac{50}{33} \\ \frac{10}{11} & \frac{20}{11} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{334}{165} & \frac{67}{66} \\ \frac{67}{110} & \frac{89}{55} \end{Vmatrix}$$

2.2. Модель планирования производства.

Имеется определенное количество изделий (деталей, полуфабрикатов, узлов), которые необходимы для производства других изделий, в том числе конечной продукции. Между отдельными изделиями должны соблюдаться технологические соотношения. Например:

Детали

Узлы

Изделия

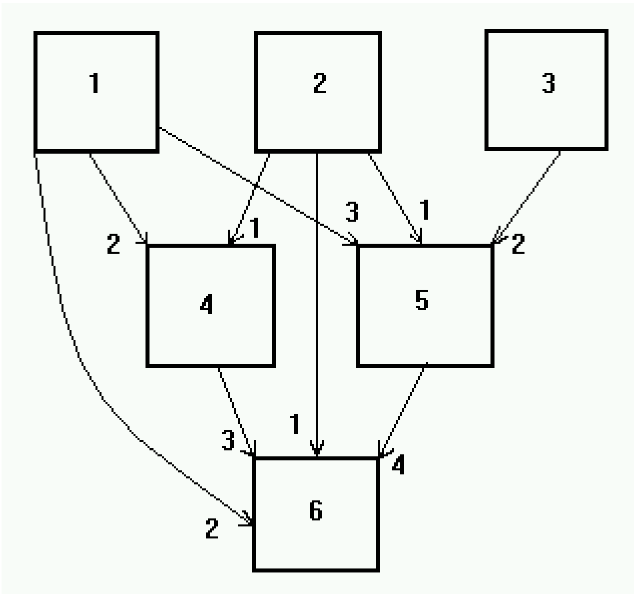

Рис. 1.

Стрелки и числа на них показывают, сколько единиц i-го изделия необходимо для изготовления единицы j-го изделия. В общем виде эта информация может быть представлена в виде матрицы затрат:

$$A = (a_{ij})_{n,n} \qquad (a_{14} = 2, a_{46} = 3 \quad \text{и т.д.})$$

Если, кроме того, требуется определенное количество деталей и узлов в качестве запасных частей, то для построения математической модели целесообразно также ввести

$\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ - общий выпуск,

$\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ - конечный выпуск.

Тогда

$$x_1 = y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$x_2 = y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_n = y_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n$$

$$\overline{X} = \overline{Y} + A \cdot \overline{X}$$

Если задан конечный выпуск, а требуется найти общий выпуск, то задача состоит в том, чтобы разрешить эту систему относительно X:

$$\overline{X} - \overline{A} \cdot X = \overline{Y}$$

$$E \cdot \overline{X} - A \cdot \overline{X} = \overline{Y}$$

$$(E - A) \cdot \overline{X} = \overline{Y}$$

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} \qquad (1)$$

2.3. Модель планирования материальных затрат.

1. Расчет общих затрат материалов

Для того чтобы заготовить нужное количество сырья и материалов, необходимо прежде всего рассчитать общие материальные затраты на предприятии.

Обозначим через b_{kj} – затраты материалов k-го вида на производство одного изделия j-го вида ($K = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$), а через $b_k = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \cdot X_j$ - общие затраты материалов k-го вида.

Если объединить все b_k в вектор $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, а все b_{kj} в матрицу $B = (b_{kj})_{m,n}$, то имеет место равенство

$$\overline{b} = B \cdot \overline{x},$$

где B – матрица материальных затрат,

$\overline{b}$ - вектор суммарных материальных затрат.

Подставив X из (1) получим формулу для вектора суммарных материальных затрат

$$\overline{b} = B \cdot (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} \qquad (2)$$

2. Расчет суммарной стоимости затраченных материалов.

Если заданы цены всех материалов P_k $(k = \overline{1,m})$, то суммарная стоимость всех затраченных материалов вычисляется по формуле:

$$K = \overline{P}^T \cdot \overline{b} = \overline{P}^T \cdot B \cdot (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y}, \qquad (3)$$

где $\overline{P}^T = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$.

3. Расчет стоимости затрат по каждому виду материалов.

Если требуется определить стоимость затрат по каждому виду материалов, то целесообразно использовать не вектор, а диагональную матрицу цен, т.е.

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_m \end{pmatrix}.$$

Вектор $\overline{K}$ стоимости затрат по каждому виду материалов получается следующим образом:

$$\overline{K} = P \cdot \overline{b} = P \cdot B \cdot (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} \qquad (4)$$

Пример: Рассчитать материальные затраты для схемы, изображенной на рис.1., если заданы:

$\overline{Y} = (3,1,5,7,9,10)$ - конечный выпуск,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$ - матрица материальных затрат,

$\overline{P} = (12,3,6,10,4,3)$ - вектор цен.

Решение:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + y_1 \\ x_2 = x_4 + x_5 + x_6 + y_2 \\ x_3 = 2x_5 + y_3 \\ x_4 = 3x_6 + y_4 \\ x_5 = 4x_6 + y_5 \\ x_6 = y_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} = \begin{pmatrix} 244 \\ 97 \\ 103 \\ 37 \\ 49 \\ 10 \end{pmatrix}$$ - общий выпуск,

$$\overline{b} = B \cdot \overline{x} = \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix}$$ - общая потребность в материалах,

$$K = \overline{P}^{T} \cdot \overline{b} = (12, 3, 6, 10, 4, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} = 45369$$ - общая стоимость материальных ресурсов,

$$\overline{K} = P \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1433 \\ 1257 \\ 799 \\ 1044 \\ 1215 \\ 1436 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 1433 \\ 3 \cdot 1257 \\ 6 \cdot 799 \\ 10 \cdot 1044 \\ 4 \cdot 1215 \\ 3 \cdot 1436 \end{pmatrix}$$ - затраты по каждому виду материалов.

Упражнения.

Решить с помощью действий над матрицами следующие задачи.

1. Швейная фирма производит три вида одежды: плащи, пальто и костюмы на пяти фабриках. За планируемый период фирма должна выпустить плащей на сумму 100 тыс. руб. пальто на 40 тыс. руб. и костюмов на 60 тыс. руб. Технологический процесс на фабрике №1 характеризуется тем, что она за планируемый период может выдать 10% плащей, 20% пальто и 60% костюмов от плана фирмы.

Другие фабрики соответственно своим технологическим процессам имеют следующие возможности

фабрика №2 – 10% плащей; 10% пальто; 10% костюмов;
фабрика №3 – 20% плащей; 30% пальто; 20% костюмов;
фабрика №4 – 30% плащей; 40% пальто; 0% костюмов;

фабрика №5 – 30% плащей; 0% пальто; 10% костюмов.
На сколько тысяч рублей продукции должна выполнить план фирмы каждая фабрика?

<u>К решению.</u>

Распределение / Произв.	ФАБРИКИ					Непроизводств. потребление в тыс. руб.
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
Плащи	0,1	0,1	0,2	0,3	0,3	100
Пальто	0,2	0,1	0,3	0,4	0	40
Костюмы	0,6	0,1	0,2	0	0,1	60

2. Секция магазина продает продукцию трех видов: А, В и С и двух сортов: первого и второго. В течение определенного месяца проданная продукция состояла из 30% А, 40% В, 30% С, причем 80% продукции А, 70% В и 50% С было первого сорта. Сколько процентов продукции каждого сорта было продано.
3. Дана матрица прямых затрат А. Найти матрицу полных затрат S и матрицу косвенных затрат S-A для:

а) $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{Vmatrix}$ б) $A = \begin{Vmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 \end{Vmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$ г) $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$

4. На предприятии имеется три цеха. Сколько продукции должен выпускать каждый цех, если дана матрица прямых затрат А и задана программа выпуска каждого цеха y_1, y_2, y_3:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$ $y_1 = 1200;$ $y_2 = 2000;$ $y_3 = 2400.$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$ $y_1 = 1224$ руб $y_2 = 1632$ руб $y_3 = 816$ руб .

5. Пусть народное хозяйство состоит из трех отраслей. Коэффициенты прямых затрат, непроизводственное потребление и накопление дано в таблице:

Распре-деление / Произ-водство	ОТРАСЛИ			Непроизводствен-ное потребление и накопление /в тыс. руб./	Ответ X
	1	**2**	**3**		
1 отрасль	0,3	0,3	0	37	151
2 отрасль	0,2	0,2	0,3	11	229
3 отрасль	0,1	0,1	0,2	74	140

Исходя из данных таблицы определить матрицу полных затрат, матрицу косвенных затрат и валовый выпуск продукции каждой отрасли.

2.4. Балансовая модель производства.

В основе балансовой модели лежат следующие основные положения о свойствах экономической системы:

1. Экономическая система состоит из экономических объектов, причем количество продукции, выпускаемой каждым объектом, характеризуется одним числом.
2. Для выпуска данного вида продукции каждый объект получает определенное количество других видов продукции – комплектность потребления.
3. Свойство линейности: увеличение выпуска продукции в некоторое число раз требует увеличения потребления объектом других видов продукции в тоже число раз.
4. Выпускаемая каждым объектом продукция частично потребляется другими объектами, а частично поступает во вне в качестве конечной продукции данной экономической системы.

Сформулированные выше предположения лишь приблизительно отражают реальную экономическую ситуацию.

Но несмотря на это, балансовые модели являются удобным инструментом планирования ввиду их простоты.

1) Пусть экономическая система состоит из n – объектов $P_1, P_2, \dots, P_n$.
2) Объем продукции, выпускаемой объектом P_i, обозначим через x_i.
3) Конечный продукт – через y_i.
4) Через X_{ij} обозначим ту часть продукции объекта P_j, которая потребляется объектом P_i.

Задача состоит в составлении плана для данной экономической системы, т.е. на основании n чисел $x_1, x_2, .., x_n$ определить n^2 чисел $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$.

Неизвестные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям 2-ух типов:

- локальным ограничениям характеризующим свойства объекта
- и глобальным ограничениям (требование равенства производства каждого вида продукции, потребности в ней)

1. Рассмотрим локальные ограничения свойств экономического объекта.

В экономической системе, для того, чтобы охарактеризовать один экономический объект P_i необходимо указать количество $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}$ других объектов, необходимых объекту P_i для того, чтобы была произведена единица продукции объектом P_i.

В соответствии с предположением о комплектности, требуемое количество i и j определяется однозначно с помощью технологических коэффициентов a_{ij} (заданные величины)

т.е.
$$\begin{aligned} a_{1i} &= a_{1i}x_1 \\ a_{2i} &= a_{2i}x_2 \\ &\;\;\ldots \\ a_{ni} &= a_{ni}x_n \end{aligned} \tag{1}$$

Коэффициент a_{ij} – называется коэффициентом прямых затрат.

Данным коэффициентам соответствует матрица А=(a_{ij}), называемая матрицей прямых затрат.

Важной особенностью А является неотрицательность ее элементов, что запишем ее следующим образом А≥0

2. Рассмотрим глобальные ограничения.

Введем следующие обозначения:

$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - вектор, характеризующий полный выпуск продукции всеми объектами.

$\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ - вектор, характеризующий объем продукции, идущий вовне.

Для того, чтобы объект P_i мог выпустить x_i единиц продукции, он должен получить $a_{ij}x_j$ единиц продукции объекта P_j.

Тогда все объекты системы должны получить единиц продукции $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j$ объекта P_j.

Т.к. объект P_j производит j- конечный продукт в V y_j, то полный выпуск продукции объектом P_j : $x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j + y_j$, $i = \overline{1,n}$ (2)

Данная система уравнений (2) представляет собой систему уравнений балансовой модели.

В векторно-матричном виде перепишем систему следующим образом:

$$\overline{x} = Ax + \overline{y} \tag{3}$$

В системе (3) известными являются матрица А и вектор конечной продукции $\overline{y}$.

Неизвестным является $\overline{x}$, которое назовем планом данной экономической системы.

Для исследования системы балансовых уравнений перепишем систему (3) в следующем виде:

$$(E - A)\bar{x} = \bar{y}, \tag{4}$$

откуда

$$\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}$$

Т.е. необходимым и достаточным условием существования и единственности решения уравнения (3) является невырожденность матрицы $(E - A)$.

Однако, исследование уравнений балансовой модели усложняется тем, что $\bar{x}$ должен удовлетворять условию неотрицательности.

Следует отметить, что не при любой неотрицательной матрице А система балансовых уравнений имеет неотрицательное решение.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.7 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

1) $E - A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.7 \\ -0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$

тогда система балансовых уравнений имеет вид:

$$+\begin{cases} 0.1x_1 - 0.7x_2 = y_1 \\ -0.6x_1 + 0.2x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$-0.5(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$$

Из полученного уравнения следует, что если $y_1 + y_2 > 0$, то не существует неотрицательных чисел x_1 и x_2 удовлетворяющих системе балансовых уравнений.

С экономической точки зрения особый интерес представляют системы, которые имеют неотрицательные решения при любом $\bar{y} \geq 0$. Поэтому исследование систем балансовых уравнений сводится к установлению условий, которым должна удовлетворять неотрицательная матрица А, для того чтобы существовало неотрицательное решение x при любом $\bar{y} \geq 0$.

Определение.

Назовем неотрицательную матрицу А продуктивной, если существует хотя бы один такой положительный вектор $\bar{x}$, что $(E - A)\bar{x} > 0$.

С экономической точки зрения данное неравенство означает, что матрица А продуктивна, если существует такой план $\bar{x} > 0$, что каждый объект экономической системы производит некоторое количество конечной продукции.

Сформулируем критерий продуктивности матрицы А.

Неотрицательная матрица А продуктивная тогда и только тогда, когда матрица $S = (E - A)^{-1}$ существует и не отрицательна.

Продуктивность матрицы А является необходимым и достаточным условием существования, единственности и неотрицательности решений системы балансовых уравнений.

Рассмотрим экономический смысл матрицы $S = (E - A)^{-1}$:

1) Пусть $\overline{S}_j$ - j-тый столбец матрицы S, тогда $\overline{x} = \sum_{j=1}^{n} \overline{S}_j \cdot y_j$
2) Рассмотрим частный случай вектора $\overline{y}$ конечной продукции:

$$y_j = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

Данное условие означает, что в экономической системе конечный продукт в количестве одной единицы выпускает только объект P_k, остальные объекты $P_1, P_2, \dots, P_{k-1}, P_{k+1}, \dots, P_n$ конечной продукции не выпускают.

В этом случае $\overline{x} = \overline{S}_{jk}$, $x_i = S_{ik} \Rightarrow$ элемент S_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i для того, чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции.

Матрицу S называют матрицей полных затрат.

Пример.

Пусть экономическая система состоит из экономических объектов P_1 и P_2. Данные приведены в следующей таблице.

	P_1	P_2	$\overline{y}$	$\overline{x}$
P_1	100	160	240	500
P_2	275	40	85	400

Найти матрицу A по матрице S.

Решение:

1) Матрица A определяет коэффициенты

$$a_{ji} = \frac{x_{ji}}{x_i}$$

$$x_{11} = 100$$
$$x_{12} = 160$$
$$x_{21} = 275$$
$$x_{22} = 40$$

$$x_1 = 500$$
$$x_2 = 400$$

$$a_{11} = \frac{100}{500} = 0.2$$

$$a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{160}{400} = 0.4$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{40}{400} = 0.1$$

Итак, $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.55 & 0.1 \end{pmatrix}$

2) $$E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.55 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1.8 & 9.8 \\ 1.1 & 1.6 \end{pmatrix}$$

Следует отметить, что элементы матрицы S могут быть существенно больше элементов матрицы A. Это объясняется тем, что элементы S_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам для того, чтобы эти объекты могли в свою очередь поставить объекту P_j требуемые количества их продукции.

Из систем балансовых уравнений следует, что планируемый орган управляющий экономической системой может определить план если точно известны элемент a_{ij} матрицы A и размеры матрицы A не слишком велики. На практике эти условия не имеют места, но при решении практических задач известны характеристики определенных объектов, т.е. информация в экономической системе рассредоточена между объектами. Поэтому при построении плана работы экономической системы необходимо согласование планов не только между отдельными экономическими объектами, но и согласование планов с планирующим органом.

Назовем данную задачу задачей управления.

Процедура решения задачи управления состоит из ряда шагов обмена информацией между планирующим органом и экономическими объектами.

На каждом шаге планирующий орган устанавливает задание каждому объекту P_i на основании накопленной информации. После этого каждый объект сообщает планирующему органу какое количество продукции других объектов ему необходимо для выполнения установленного задания.

Планирующий орган на основании информации экономических объектов составляет новый план для каждого объекта и т.д.

Назовем данную процедуру составления плана процедурой перезаказов.

Пусть $\bar{y}_0^{\,0} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ - вектор конечного продукта, который должен произвести исследование экономической системы.

На первом шаге планирующий орган сообщает каждому объекту P_j в качестве задания число $y_i^{(0)}$ в ответ объект P_j сообщает планирующему органу заказы на продукцию других объектов для выполнения задания $y_i^{(0)}$.

$$y_j^{(0)} \cdot \bar{a}_j = (a_{1j} y_1^{(0)}, a_{2j} y_2^{(0)}, \dots, a_{nj} y_n^{(0)})$$

Из данного выражения следует, что для составления заказов объекту P_j должны быть известны только коэффициенты a_{ij} матрицы А и y_j конечной продукции.
Собрав всю информацию от всех объектов, планирующий орган составляет новое задание $\overline{y}^{(1)} = \overline{y}^{(0)} + A\overline{y}^{0}$.
На втором шаге планирующий орган сообщает экономическим объектам новое задание: объект P_j получает в качестве задания $y_j^{(1)}$. В ответ на полученное задание от объекта P_j поступает новый заказ, который равен $\overline{a}_j y_j^{(1)}$ и планирующим органом составляется новое задание $\overline{y}^{(2)} = (E + A + A^2)\overline{y}^{(2)}$, т.е. на k-том шаге планирующим органом формируется задание $\overline{y}^{(k)} = (E + A + A^k)\overline{y}^{(k)}$.

Сформируем следующую теорему.

Теорема.

Если матрица А продуктивная, то $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(k)} = (E - A)^{-1}\,\overline{y}_0$.

Из данной теоремы следует, что при $k \to \infty$ вектор задания y_k стремиться к вектору $(E - A)^{-1}\,\overline{y}^{(0)}$, являющемуся решением системы балансовых уравнений.

При составлении плана методов перезаказов можно предположить, что планирующему органу не следует решать систему балансовых уравнений, т.е. не следует предварительно рассчитывать план для экономической системы. Однако на практике процедура перезаказов может включать лишь небольшое число шагов k, поэтому при небольшом числе k ошибка в определении плана может быть велика. Если же планирующий орган на основании системы балансовых уравнений получит приближенное решение, то при этом существенно уменьшится ошибка в вычислении в процедуре перезаказов.

Для этого на первом шаге планирующий орган должен сообщить в качестве задания не вектор $\overline{y}^{(0)}$, а полученное им приближенное решение $\overline{\pi}^{(0)}$ и действовать так, как было описано выше.

При этом, чем меньше приближенное решение отличаются от точного решения, тем меньше число шагов требуется для выполнения процедуры перезаказов.

При исследовании экономической системы предполагается, что экономическим объектам требуется только продукция других объектов этой же системы. Однако, при решении практических задач должны учитываться факторы производства и потребности в продукции других экономических систем.

Назовем факторы производства и потребность в продукции других систем просто факторами.

Потребность экономической системы в факторах характеризуется вектором $\overline{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$, где Z_i – потребность в i –том факторе. Числа Z_i могут измеряться как в натуральных единицах, так и в денежных единицах.

Если потребление объекта P_j в факторах обозначим через $b_j = \{\beta_{1j}, \beta_{2j}, \ldots, \beta_{mj}\}$, то матрица $B = (\beta_{ij})$, $i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m}$ представляет собой матрицу прямых затрат факторов.

В этом случае план $\overline{x}$ для экономической системы равен $\overline{Z} = B \cdot \overline{x}$.
Следует отметить, что вектор $\overline{x}$ является решением системы балансовых уравнений,

но т.к. факторы ограничены, то должно выполняться следующее условие: $B\overline{z} < \overline{a}$, где $\overline{a}$ - вектор ограничений факторов.

Ответы к упражнениям.

1.1.1. 2; 1.1.2. 8; 1.1.3. 11; 1.1.4. 36; 1.1.5. $\frac{n(n-1)}{2}$; 1.1.6. $\frac{n(n+1)}{2}$;
1.1.7. $\frac{n(n-1)}{2}$; 1.1.8. $3n(n+1)$; 1.1.9. $\frac{n(3n+1)}{2}$; 1.1.10. плюс;
1.1.12. плюс; 1.1.13. плюс при четном n, минус при нечетном n;
1.1.14. плюс при четном n, минус при нечетном n; 1.1.15. нет;
1.1.16. плюс; 1.1.17. минус; 1.1.18. нет; 1.1.19. i=1, j=4;
1.1.20. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$, $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$; 1.1.21. а) все элементы третьей строки равны 0, б) первый и второй столбцы пропорциональны, в) первая и третья строки равны; 1.1.22. а) 1302600, б) -375; 1.1.24. 4 abc; 1.1.25. а) -3, б) 3; 1.1.26. а) 88, б) 60, в) 56, г) 6; 1.1.27. а) -x-y-z+4t, б) -2a+b+c+d, в) 0;
1.1.28. а) abcd, б) $a^2+b^2+c^2-2$ (ab+ac+bc), в) -2a+8b-c-5d; 1.1.29. -40; 1.1.30. 20; 1.1.31. 1; 1.1.32. 12; 1.1.33. 189; 1.1.34. 160; 1.1.35. 0; 1.1.36. 0; 1.1.37. -10;
1.1.38. -0.275; 1.1.39. -1; 1.1.40. 16; 1.1.41. -4; 1.1.42. 20; 1.1.43. n!; 1.1.44. -2(n-2)!;
1.1.45. $n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; 1.1.46. 2n+1; 1.1.47. $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$;
1.1.48. $[X+(n-1)a](X-a)^{n-1}$; 1.2.1. а) $\begin{Vmatrix} 11 & 0 \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$, б) $\begin{Vmatrix} -2 & 17 \\ -1 & 23 \end{Vmatrix}$, в) $\begin{Vmatrix} 10 & 7 \\ -2 & 15 \end{Vmatrix}$;

1.2.2. а) $\begin{Vmatrix} -6 & 1 & -8 \\ 10 & 10 & -18 \\ -4 & 10 & -8 \end{Vmatrix}$, б) $\begin{Vmatrix} -7 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & -11 \\ -8 & 5 & -6 \end{Vmatrix}$, $\begin{Vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 12 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$;

1.2.3. $AB = \begin{Vmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & -5 \\ 4 & 8 & -4 \end{Vmatrix}$; $BA = \begin{Vmatrix} 9 \end{Vmatrix}$; 1.2.4. $\begin{Vmatrix} 24 & 5 \\ -7 & 16 \end{Vmatrix}$; 1.2.5. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

1.2.6. $\begin{Vmatrix} 16 & 22 & 11 \\ 18 & 16 & -2 \\ 17 & 14 & -2 \end{Vmatrix}$; 1.2.7. $\begin{Vmatrix} 60 & 44 \\ -10 & -14 \end{Vmatrix}$; 1.2.8. $\begin{Vmatrix} -44 \\ -12 \\ 2 \end{Vmatrix}$; 1.2.9. $\begin{Vmatrix} 1 & 9 & 15 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{Vmatrix}$;

1.2.12. $\begin{Vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 16 \end{Vmatrix}$; 1.2.13. $\begin{Vmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$; 1.2.14. $\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{Vmatrix}$; 1.2.15. $\begin{Vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{Vmatrix}$;

1.2.18. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 1.2.19. $\begin{Vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ -9 & 14 & -5 \\ 6 & 6 & 17 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} -4 & 1 & 9 \\ -17 & 2 & -7 \\ 4 & -7 & 4 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} -8 & 12 & 17 \\ -36 & -4 & -31 \\ -1 & 1 & 22 \end{Vmatrix}$;
не выполняется;

1.2.20. $\begin{Vmatrix} 14 & 4 \\ 5 & 15 \end{Vmatrix}$; 1.2.21. $\begin{Vmatrix} 5 & 33 & 13 \\ 14 & 46 & 21 \\ 4 & 13 & 0 \end{Vmatrix}$;

1.3.1. $\frac{1}{22}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{Vmatrix}$; 1.3.2. $\begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$; 1.3.3. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

1.3.5. $\frac{1}{63}\cdot\begin{Vmatrix} 10 & 7 & -5 \\ 17 & -7 & 23 \\ -8 & 7 & 4 \end{Vmatrix}$; 1.3.6. $\frac{1}{414}\cdot\begin{Vmatrix} 82 & -62 & 38 \\ -59 & 85 & 8 \\ -7 & -25 & 22 \end{Vmatrix}$;

1.3.7. $\frac{1}{4}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$; 1.3.8. $\frac{1}{15}\cdot\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 11 & -6 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -6 & 9 \\ 3 & -3 & 9 & -6 \end{Vmatrix}$;

1.3.9. $\frac{1}{24}\cdot\begin{Vmatrix} -8 & 8 & 8 & -16 \\ 8 & -8 & -8 & 24 \\ -5 & -4 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -5 \end{Vmatrix}$; 1.3.10. $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

1.3.11. $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$; 1.3.12. $\begin{Vmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{Vmatrix}$;

1.3.13. $\begin{Vmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{Vmatrix}$; 1.3.14. $\begin{Vmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -11.5 & -1 & 2 & 3.5 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;

1.4.1. $\begin{array}{l} x_1 = 14z_1 + 2z_2, \\ x_2 = 2z_1 + 5z_2 \end{array}$ 1.4.2. $\begin{array}{l} z_1 = 5y_1 + 3y_2, \\ z_2 = -8y_1 + 5y_2 \end{array}$ 1.4.3. $\begin{array}{l} x_1 = 5z_1 + z_2 - 9z_3, \\ x_2 = 5z_1 + 5z_2 - 7z_3, \\ x_3 = 5z_1 + 6z_2 + 8z_3 \end{array}$

1.4.4. $\begin{array}{l} z_1 = 11y_1 + y_2 - y_3, \\ z_2 = -4y_1 - y_2 - 2y_3, \\ z_3 = 5y_1 + 4y_2 - y_3 \end{array}$ 1.4.5. $\begin{array}{l} y_1 = -2x_1 + x_2, \\ y_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{array}$

1.4.6. $\begin{array}{l} x_1 = y_1 - 4y_2 - 3y_3, \\ x_2 = y_1 - 5y_2 - 3y_3, \\ x_3 = -y_1 + 6y_2 + 4y_3 \end{array}$ 1.4.7. $\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = -x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{array}$

1.5.1. 2; 1.5.2. 3; 1.5.3. 3; 1.5.4. 4; 1.5.5. 3; 1.5.6. 4; 1.5.7. 2; 1.5.8. 3; 1.5.9. 4; 1.5.10. 2; 1.6.1. (1;-1;2); 1.6.2. (3;-1;0); 1.6.3. (2;0;0;0); 1.6.4. (1;-1;3;1);

1.6.5. (1;-1;0;2); 1.6.6. (0;0;0;0); 1.6.7. (1;-1;1;-1); 1.6.8. (2;0;-2;-2;1); 1.6.9. 0;
1.7.4. (1;2;-2); 1.7.5. (1;2;2); 1.7.6. (3;0;2;1); 1.7.7. $(0;2;\frac{5}{3};-\frac{4}{3})$;
1.7.8. (1;-1;1;-1;1); 1.7.9. $x_1 = -8;\ x_2 = 3 + x_4;\ x_3 = 6 + 2x_4$;
1.7.10. $x_1 = 4 + 2x_3 + x_4 - 2x_5;\ x_2 = 1 - x_3 + x_4 - 3x_5$;
1.7.11. $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5;\ x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$;
1.7.12. $x_1 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{7}{8}x_5;\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{5}{8}x_5;\ x_3 = \frac{1}{2}x_4 - \frac{5}{8}x_5$; 1.7.13. ---
1.7.18. системы несовместны; 1.7.19. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$;
1.7.20. $x_1 = \frac{3}{17}x_3 - \frac{13}{17}x_4;\ x_2 = \frac{19}{17}x_3 - \frac{20}{17}x_4$; 1.9.1. (7, 7); (21, 1); (17, 18); (-10, -4); 5; 5; arccos 0,96; 1.9.2. (5, 4); (3, 0); (14, 10); (4, -4); $2\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; arccos 0,8; 1.9.3. 0; $90°$; (3, -5, 2, 0); (9, -10, -4, 10); 1.9.4. 5; $\arccos\frac{\sqrt{10}}{6}$; (1, -1, 3, 0); (8, 7, 9, 5);
1.9.5. -2; $\arccos\left(-\frac{1}{15}\right)$; (1, -1, 1, 4, -2);
1.9.6. 16.5 руб.; 1.10.1. (1, 4, -7, 7); 1.10.2. (0, 1, 2, -2); 1.10.3. ---; 1.10.4. линейно независима; 1.10.5. линейно независима;
1.10.6. $2\overline{P}_1 - \overline{P}_2 + \overline{P}_3 = \overline{0}$; 1.10.7. линейно независима;
1.10.8. $/3\lambda_3 + \lambda_4 /\ \overline{P}_1 - 3/\ 3\lambda_3 + \lambda_4 /\ \overline{P}_2 + \lambda_3\overline{P}_3 + \lambda_4\overline{P}_4 = \overline{0}/$;
1.10.9. $\lambda = 15$; 1.10.10. λ - любое действительное число;
1.10.11. $\overline{A}_3 = 2\overline{A}_1 - 3\overline{A}_2$; 1.10.12. $\overline{P}_3 = 3\overline{P}_1 - 8\overline{P}_2$;
1.10.13. $\overline{A}_4 = 2\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + 3\overline{A}_3$; 1.10.14. $\overline{A}_4 = 2\overline{A}_1 - 3\overline{A}_2 + \overline{A}_3$;
1.10.15. $\overline{A}_4 = 3\overline{A}_1 - 3\overline{A}_2 - \overline{A}_3$; 1.10.16. $\overline{A}_5 = -4\overline{A}_1 + 5\overline{A}_2 + \overline{A}_3 - \overline{A}_4$;
1.11.1. $\overline{P}_1 = 3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$; 1.11.2. (3, -2); 1.11.3. (1, 2, 3);
1.11.4. (1, 1, 1); 1.11.5. (1.4, 5.2, 0.4); 1.11.6. (4, 0, 3, 0);
1.11.7. $\overline{e}_1 = 2\overline{a}_1 - 3\overline{a}_2;\ \overline{e}_2 = -\overline{a}_1 + 2\overline{a}_2$; 1.11.8. $\overline{e}_1 = -\overline{A}_1 - 4\overline{A}_2 + 2\overline{A}_3$;
$\overline{e}_2 = 2\overline{A}_1 + 9\overline{A}_2 - 4\overline{A}_3;\ \overline{e}_3 = -2\overline{A}_2 + \overline{A}_3$; 1.11.9. $\overline{e}_1 = \frac{26}{11}\overline{A}_1 - \frac{19}{11}\overline{A}_2 + \frac{34}{11}\overline{A}_3$;
$\overline{e}_2 = \frac{10}{11}\overline{A}_1 - \frac{9}{11}\overline{A}_2 + \frac{8}{11}\overline{A}_3;\ \overline{e}_3 = \frac{5}{22}\overline{A}_1 + \frac{67}{22}\overline{A}_2 + \frac{15}{22}\overline{A}_3$;
1.11.10. $\overline{e}_1 = -\overline{A}_1 + 2\overline{A}_2 + 2\overline{A}_3 - \overline{A}_4;\ \overline{e}_2 = -\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 - \overline{A}_4$;
$\overline{e}_3 = -\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + 2\overline{A}_3;\ \overline{e}_4 = \overline{A}_1 - 2\overline{A}_2 - 3\overline{A}_3 - \overline{A}_4$; 1.11.11. $\overline{e}_1 = -2\overline{P}_1 + 1.5\overline{P}_2$;
$\overline{e}_2 = \overline{P}_1 - 0.5\overline{P}_2$; (-5; -4.5); 1.11.12. $\overline{e}_1 = -0.5\overline{P}_2 + 0.5\overline{P}_3;\ \overline{e}_2 = -\overline{P}_1 + \overline{P}_2$;
$\overline{e}_3 = 2\overline{P}_1 - 0.5\overline{P}_2 - 0.5\overline{P}_3$; -(2, 1, -1); 1.11.13. $\overline{P}_1 = \frac{7}{6}\overline{A}_1 - \frac{5}{6}\overline{A}_2 + \frac{3}{2}\overline{A}_3$;
$\overline{P}_3 = 2\overline{A}_1 - 2\overline{A}_2 + 3\overline{A}_3;\ \overline{P}_4 = -5\overline{A}_1 - \overline{A}_3$.